線形代数学第一 (LAS.M102-10)

階数・逆行列

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/05/02 (2022/04/25 訂正)

正則行列と逆行列

問題 5-1

問題

行列

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

と 4 つの列ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対して $A\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{e}_j$ を満たす列ベクトル $\boldsymbol{x}_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ を求めなさい.

行列の正則性と逆行列の計算

テキスト 58 ページ，§2.6.

問題 6-1

問題

n 次正方行列 A に対して，n 次列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を未知ベクトルとする連立一次方程式（同次方程式・斉次方程式）

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{$*$}$$

を考える．ただし $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルである．

1. $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_r$ が (??) の解ならば，スカラ λ_1, ..., λ_r に対して

   $$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n$$

   も ($*$) の解であることを示しなさい．
2. A が正則ならば ($*$) の解は零ベクトルのみであることを示しなさい．