2022 年 5 月 2 日 (2022 年 5 月 6 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 (LAS.M102-10) 講義資料 6

■お知らせ

- 今回は課題があります．休日で申し訳ありませんが 5 月 4 日（水曜日）10 時までに提出してください．
- 前回，今回と「これは試験にでますか」「試験にこう書いてよいですか」というあまりお行儀のよろしくない質問を複数いただいています．最初の授業で申し上げました通り，中間試験はそのような「手の内をあかす」ためのものです．個別の回答は差し控えさせていただきます．
- 上手（かみて）側のスクリーンのプロジェクタの映写サイズが正しくないので画面が切れているというご指摘がありました．申し訳ありません．講義開始前に調整できるだけの時間がなかったのですが，どうやればよいかご存知の方は教えて下さい．
- 今回は声が聴き取りやすかったそうです．ハウリングぎりぎりまで音量をあげるのがよさそうですね．

■前回の補足

- 連立一次方程式を行列表示することに何のメリットがあるか？ というご質問が多数.「連立一次方程式を解く」という問題があるなら，どうやって解いてもよいし，どう表示してもよいですからとくにメリットはありません．むしろ，線形写像や線形変換（後期に扱う）の性質を調べる問題は行列の性質を調べる問題に帰着されますが，多くはそれが連立一次方程式を解く問題になっています．そのような「読み方」ができるならばなんでもいいです．
- 連立一次方程式の解き方は，掃き出し法の他に何かないか，というご質問も複数．たとえば定理 3.21 に係数行列が正則行列である場合の解の公式があります．$n=2$，$n=3$ のときにはこの公式が結構有効にはたらき，解を暗算で求めることも可能になりますが，未知数が多いときには計算量が極端に増える（$n!$ のオーダーで増える）ので，解を求める際にはあまり有効ではありません．むしろ解が具体的に表示されることが理論的なメリットとなっています．
- 拡大係数行列 $[A, \boldsymbol{b}]$ の係数部分と非同次項の部分の間に縦線を入れてよいか，というご質問が複数．テキストは入れていますね．どちらでも結構．
- 行基本変形のステップで $A \to A'$ のような矢印を使っています．これについてのご質問も複数．(1) ここで “$=$” は使ってはいけません．行列が「等しい」ということの定義はテキスト 4 ページ．(2) 山田は矢印を使いますが，そこまで一般的な記号ではなさそうです．他の記号を使っていただいても結構ですが，一つの文脈で二つ以上の記号を使うのはまずいです．
- テキスト 1.5 節（補足）はやらないのか，というご質問が複数．必要な時は戻ってコメントします．

■前回までの訂正

- 「誤りはなかった」と明記された方がいらっしゃいますが，ここにあるように多くの誤りがあります．また，この講義資料は作成に時間をかけていませんので誤りがたくさんあるはずです．探してみましょう！
- 4 月 25 日，黒板 C の 19 ページ（pdf ファイルのページ番号）：最初にでてきた同値記号 $\Leftrightarrow$ はあやまり．「行列と方程式が対応している」という意味です．
- 4 月 25 日，映写資料 B の 1 ページ（対応する黒板 B）方程式 2 行目の x_3 の係数：$a_{13} \Rightarrow a_{23}$．
- 4 月 25 日，黒板 C の 28 ページ（pdf ファイルのページ番号）：「$a \neq 2$ & $a \neq 1 \Rightarrow$ はき出しできる 」$\Rightarrow$「$a \neq -2$ & $a \neq 1 \Rightarrow$ はき出しできる 」

■授業に関する御意見

- 数学の復習をする際，先生が板書を公開してくださっているのでいつも助かっています．
  山田のコメント： よかったです．なお，書き間違いのチェックはしていませんので自己責任でご利用ください．
- もし可能であれば，授業前半のスライドを休憩時間に T2 スカラーに上げてほしいです． **山田のコメント** スライドは「映写資料」として講義前にあげています．黒板については，一人でその時間帯にやるのは手間がかかりますので，勘弁してください．
- 連立方程式の解き方を 1 ステップずつ丁寧に解説してくださってとても分かりやすかったです． **山田のコメント** どうも．
- 説明がすごく分かり易く，講義中に内容をすべて理解することができました．ありがとうございます．
  山田のコメント： そう？ 分かりやすい話，というのはすでに（潜在的に）分かっている話なのかも知れません．
- 掃き出し法の手順の説明がゆっくりでありがたかったです． **山田のコメント** なるほど．
- とても丁寧でわかりやすくとても理解しやすかったです!! **山田のコメント** そう？ なるほど．

- 今までと違った連立方程式の見方ができて新鮮でした．　**山田のコメント** 今まではどう見えていたのでしょう．
- 今回は中学，高校の復習みたいで楽しかったです．．　**山田のコメント** ほとんどただの復習ですね．
- 今回はスライドが細かく作られていてとてもわかりやすかったです．　**山田のコメント** 1 回だけです．
- 行列の変形が楽しかったので勉強へのモチベーションが上がった．　**山田のコメント** 九九の練習に似た雰囲気がありますよね．
- 変形の作業が楽しいです．　**山田のコメント** 楽しい人とつらい人がいそうですね．
- 行列のメリットがなんとなく実感できました．　**山田のコメント** そう？「なんのメリット」というご質問はたくさん来ますね．
- $\neq$ の斜め線は $\backslash$ の向きでもいいのでしょうか．　**山田のコメント** 山田は区別しません．関係の否定に使う斜線の $/$ と $\backslash$ を区別する，という文脈であればきちんと書き分けないといけませんね．
- 個人的にはとても落ち着いた雰囲気が分かりやすい授業であることに寄与しているのではないか，と思いました．
  山田のコメント： よく落ち着きがないと言われますが．
- 授業ありがとうございました．　**山田のコメント** どういたしまして．
- 素敵な講義，ありがとうございました．ところで珈琲は嗜まれますか？　**山田のコメント** 嗜む程度には．
- 自由度というものがわからない．
  山田のコメント： はい．ちゃんと定義していませんので．条件を満たす対象全体を表示するために必要な「パラメータの数」
- 休憩がありがたいです．　**山田のコメント** 了解．続けます．前でぼーっとしていると間が持ちませんが．
- 休憩中の雑談が好きです．　**山田のコメント** 全部雑談みたいなものかも知れません．
- サスペンダー好きなんですか．　**山田のコメント** 胴囲の変化に対して安定的なので．
- ムンクが好きなんですか?　**山田のコメント** 40 年くらい前に近代美術館にムンク展を見に行きました．大変に疲れました．
- いつか授業に「叫ぶ人」の人形を連れてきて欲しいです．　**山田のコメント** いや．
- 今のところ授業に不満のある点はありません．　**山田のコメント** はい．
- 先生の好きな数字はなんですか．僕は理由もなく 3 が好きです．　**山田のコメント** 2 次元っていいよね．
- 線形代数に限ったことではないのですがなぜ 1, 2 限にしているのでしょうかと思いました．　**山田のコメント** ねえ．
- 眠気に勝てない　**山田のコメント** 原文では漢字が間違っています．「勝」の字の旁（つくり）が「泰」みたいに見えます．
- 前回の授業で先生の笑顔がかわいいという意見があったと聞いて，今回の授業で確かめようとしましたが，やはりマスクが邪魔でわかりませんでした．　**山田のコメント** ですよね．マスクに助けられています．

■質問と回答

質問 1： 一般に行列の階段形は一意に定まるのですか．　**お答え：**テキスト，定理 2.3.

質問 2： 1 つの列に 1 が 1 個だけあり，他の数が 0 であればわざわざ階段にする必要なくても良い（山田注：必要はない，ということ？）と思うのですが階段にする必要性は何でしょうか．($\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ ではなくて $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$ の場合でも解けませんか？)

お答え： おっしゃるとおり，連立一次方程式を解くだけなら階段にする必要はありません．(1) 理論展開をする上で「階段行列」の一意性があると嬉しい．(2) 順番に階段型にしていくとどの変数を消去するかがわかりやすい．

質問 3： $[A, \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix}0&1&0&a\\1&0&0&b\\0&0&1&c\end{bmatrix}$ とする．第一行と第二行を入れ替えて $\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&1&0&a\\0&0&1&c\end{bmatrix} = [E, d]$ より $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b\\a\\c\end{bmatrix}$ であってますか．

お答え： あってます．“$= [E, d]$ より” の部分，これはこの式によってベクトル d (ここでは太字 d の方が適当ですね) を定義することになっています．「より」では「これが成り立つからしたがって」のような意味に見えますので言い回しを変えたほうがよい．

質問 4： $[A, \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ のとき $\begin{cases}x_1=2\\x_2+x_3=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=2\\x_2=3-c_3\\x_3=c_3\end{cases}$ （c_3 は任意定数）としていたが，$\begin{cases}x_2=c_2\\x_3=3-c_2\end{cases}$ としないのは何故か．しても良いのか？ 先でメリットがあるとか？　**お答え：**どちらでもよい．解がパラメータを含む場合，解の表示は一通りではない．

質問 5： 25 日の授業で階段行列を教わりましたが，段になる要素はかならず 1 でなければならないのでしょうか．例えば，次の行列 $\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&5\\0&0&1\end{bmatrix}$ の第 2 列は段になりますが，たとえばこの行列が $\begin{bmatrix}1&0&3\\0&3&5\\0&0&1\end{bmatrix}$ のようになった時，この第 2 列は段になっていると言えますか．　**お答え：**「段になっている」という語はきちんと定義がないはずですが，階段行列には定義があります（テキスト 38 ページ）．前者も後者も階段行列ではないですね．

質問 6： 階段行列でない行列 A について，$\operatorname{rank} A$ は A を基本変形してできる行列 B の階数を表すのでしょうか．

お答え： はい．テキスト 42 ページ．

質問 7： $\operatorname{rank}(A, \boldsymbol{b}) < \operatorname{rank}(A)$ となることはありますか？　**お答え：**A を階段行列 B に変形する行基本変形と同じ変形を $\widetilde{A} = [A, \boldsymbol{b}]$ に施した結果は $\widetilde{B} = [B, \boldsymbol{c}]$ の形になる．ただし B は階数 r の階段行列．これをさらに階段行列に変形するには，1 番右の列に関する掃き出しをすればよい．さて $\widetilde{B}$ の階数が B の階数を超えることはあるだろうか．

質問 8： $\operatorname{rank} A$ と $\operatorname{rank} \widetilde{A}$ の大きさの比較で，解あり，解なしの判別ができたり何個のパラメータを持つかを判断できる理由が分からなかったです．　**お答え：**そうですか．少し補足します．

質問 9： 行の入れ替えなどの基本変形の操作は，連立方程式を解く上では同値変形ということですか？ 基本変形後の行列と元の行列は，行列としては別の同値ではないものということになりますか？

お答え：「行列として同値」とはどういうものを指しているのでしょう？

質問 10： 連立一次方程式を解くなかで，行，列を入れ替えることは同値な操作ですか？

お答え： 行，列を入れ替えるとは「転置」のことですか？ それは連立一次方程式の同値変形ではありません．

質問 11： 列基本変形で二つの列 c_i と c_j を入れ換えると行列として別物になり，同値性が崩れてしまうことはないのですか？

お答え： 行基本変形でも一般に行列としては別物になるのでは？ 列を入れ替えるということは連立一次方程式に対して何を施すことなのか，それは連立方程式の同値性を保っているか．

質問 12： 前回の授業で，係数行列の行は入れ替えて良いと仰っていましたが，係数行列の行を入れ替えたら，未知数の項と非同次項も同様に入れ替えるのですか． **お答え：**はい，と思いましたが「未知数の項」はどうやって入れ替えるのだと思いますか？ 連立一次方程式が同値になるように変形するにはどうしたらよいでしょう．

質問 13： 拡大係数行列の左上の成分はなぜ 1 にするのですか？ 0 では解けないのでしょうか？

お答え： 左上が 0 になっている階段行列もありますよね．

質問 14： (p,q) 成分を 1 にして第 q 列を掃き出すときに p 行をつかって他の行の成分を 0 にすることは掃き出しの前後が同値となることと関係しているのですか？ p 行をつかって 0 を作り出す理由が知りたいです．

お答え： 掃き出しの各々のステップは方程式を同値に変形しているので，とくに「p 行を使っている」から同値になるわけではありません．だから「前後が同値となること」とは関係していません．一つの軸 pivot (ここでは p 行) に着目して q 列の他の成分を消すことにしているのは，闇雲にやると階段形がくずれたり，掃き出しが進行しなかったりするからです．

質問 15： 拡大係数行列の中で行の順番の入れ替えが可能なのは他の行列との和や積をとる演算がないからですか？

お答え： ご質問の意図がわかりません．「和や積をとる演算がない」ことと「行の入れ替えが可能」の間があなたの中でどうつながっているのか言語化して下さい．なお，入れ替え可能なのは方程式の同値変形だからです．

質問 16： 4 月 25 日の黒板 C の 7 ページで，2 行目を $(-\frac{1}{5})$ 倍するのは，$a_{ii}=1$ $(1 \leqq i \leqq n)$ にするためということでいいですか．

お答え： はい．

質問 17： A を n 次正則行列，B, C を n 次正方行列としたときに $AB=CA$ が成り立つなら $B=C$ かつ $AB=CA=E$ は一般に成り立ちますか？ **お答え：**反例：$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ とすれば $AB=CA$.

質問 18： 掃き出し法を考案した人は誰ですか？ 掃き出し法以外の解法は存在するのでしょうか．

お答え： 前半：Gauss' elimination という名前はあります．まあ，だれでも考えつきそうです．後半：何の解法でしょう．

質問 19： 掃き出し法について，ガウスの発明だとおっしゃっていましたが，高校で行列について学んだ際，中国や日本，独逸で昔から掃き出し法が用いられていたと教わりました．どちらが正しいのでしょうか．

お答え： 昔によるかもしれません．和算の文献にも掃き出しに近い記述はあるようで，まあ，誰でも思いつくことかもしれません．Gauss 以前のものはどれくらいあるのでしょうね．

質問 20： 数学的な内容からは少し外れるかもしれませんが，掃き出し法という名前はなぜというのでしょうか．そういうものだと言ったらおわりですが，英語では row で，あまり掃き出している感がないなと思ってし

お答え： 何故か途中で切れてます．“row” は「行」ですね．行基本変形による掃き出しは “row reduction”.

質問 21： 行基本変形の 3 つの操作のうち，教科書 p. 31 上での [R1] と [R3] を乱用する場合はありますか？

お答え： 乱用？ 利用する場面はありますね（としか言いようがない）．

質問 22： 掃き出し法の操作はできるようになりましたが，なぜ掃き出し法で答えがでるかがわかりませんでした．

お答え： 基本変形の操作が方程式の同値変形だから．

質問 23： 拡大係数行列から階段行列にするのに掃き出しを繰り返すのは非常に面倒に思えるのですが，他に解法はないんですか？ 慣れるものですか？ **お答え：**掃き出しの手法，基本変形で「解ける」ということを実感しておくことが重要．方程式を解くだけなら，どうやっても解ければよい．

質問 24： はき出し法を用いることで，連立方程式が非常に機械的に解けることに感動しました．そこで疑問に思ったのですが，コンピュータが連立方程式を解くとき，このはき出し方を用いて解くのでしょうか．はたまたもっと効率的な方法を使っているのでしょうか． **お答え：**Tune up されていますが，原理的には掃き出し．

質問 25： 連立一次方程式については現段階では今までの解き方がはやいとのことですが，今後線形代数学を用いる方がはやくなるということはありますか？ **お答え：**いままでの方法とは何をさしてるのでしょうか？

質問 26： 連立一次方程式を解く際に用いる行列が，いままで扱ってきた「行列」ではなく「ただの係数整理」にみえます．今後行列を連立一次方程式を解くために使う際に転置などを用いることはあったりしますか？ **お答え：**おっしゃるとおり．係数整理から行列，という筋でしょうか．我々の文脈では転置を使うことはないと思いますが，クラーメルの公式は転置を含んでいますね．

質問 27： 講義最終盤で板書では「$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A}$ のとき，解は $(k-r)$ 個のパラメータを含む」とありましたが，口頭では「$(m-r)$ 個」と言っていた気がします．どちらが正しいでしょうか？ **お答え：**係数行列が $m \times k$ 型，階数が r なら $(k-r)$ 個．

質問 28： 25 日の黒板 B スライド 6 枚目，「3 つくらい自由に決められるパラメータがある」とありますが，3 つと言い切っていないのは何か理由があるのでしょうか？ **お答え：**3 本の方程式が本当に「独立」であることをここでは示していないから．

質問 29： 拡大係数行列の $\widetilde{A}$ のテルダと随伴 $A^* = [\tilde{a}_{ij}]$ のテルダは同じものですか．

お答え： 文字としては同じ．いずれも，一時的な記号で絶対的な意味を持ってはいない．

質問 30： := で表しているところは = で表しても問題はないですか．= と := のつかい分け方がわかりません．

お答え： 講義資料 4, 質問 51 ～ 53, 4 月 25 日の黒板 C の最終ページ．

質問 31： $Ax=b$ (A：係数行列，x：未知数ベクトル，b：定数項ベクトル）のとき A, x, b のフォントはどうすればよいのですか．

お答え： テキストの記法に従う．

質問 32： 数字のゼロ，零ベクトル，零行列は手書きの際はすべて 0 でよいですか．それとも零ベクトルは太字 $\mathbb{O}$，零行列は O（大文字？）で書くのが一般的ですか．

お答え： テキストに従う．ここでは $\mathbf{0}$ は太字で書きましょう．零行列はアルファベット大文字オーのイタリック体です．

質問 33： 授業内で $\sum$ の下にアルファベットだけを書くことがありますが，テストでこのような省略をしてもよいのでしょうか．

お答え：「テスト」についてはこのような下品な質問はしないこと．もしあなたが確信を持って曖昧さなく書いたもので減点をされているのでしたらクレイムをつけてください．議論に応じます．さて，このような場合は文脈で推測できるような場合に省略するよう

にしましょう．何通りも解釈が出そうなときに省略してはいけません.（省略するならそれくらいは理解してからやってください）

質問 34： なんで対角線は一つが優位なんですか？

お答え： たとえば単位行列は重要な性質をもっている．単位行列の 1 が並んでいる場所は重要ですよね．

質問 35：「掃き出し法」と毎回漢字で書くのが億劫なので,「はき出し法」と書いてもいいですか．

お答え： 誤解のおそれがないならよい．語頭がひらがなの「は」なので前後の関係によっては句読点の調整が必要かも知れない．

質問 36： 勉強方法についてですが，教科書の隅々まで理解して次に進むのと，大体理解して次に進み，後から戻ってしっかり理解するのは，どちらが良いと考えていらっしゃいますか？

お答え： たぶん「前者ができるなら授業は必要ない」．限られた時間で大筋を理解しておくべきだと思います．あなたが短時間で「隅まで理解できる」自信があるなら別ですが．

質問 37： おまけや第 x 章でやる等のやつはどのくらいの意識でのぞめばいいのか，というところが気になった．少し詳しくいうと，どのくらいのレベルで頭に入れておくべきかということで，ただ頭のかたすみにおくのか，家でもっと深くほりさげるべきなのかということ．

お答え： 頭のすみにおいておけばよいと思いますが，掘り下げると面白いかもしれません．

質問 38： 係数が虚数で虚数解をもつ連立方程式も掃き出し法で解けるんでしょうか．

お答え： はい．掃き出し法は加減乗除しか用いていませんので．

質問 39： 今回の講義は前回に比べて新しい用語が少なくて理解しやすかったです．行列を習い初めて計算できないことはないけれど計算ミスをしやすいと感じています．防ぐ方法，間違いに気づく方法がもしあれば教えていただきたいです．

お答え： 計算を消さない．１ステップずつ前に戻れるようにしておく．

質問 40： 行列はいま 1 次の連立方程式しか表わせませんが，2 次以上の連立方程式を表せるようになりますか？

お答え： たかだか 2 次くらいだったら簡単に思いつきますよね．方程式の形に何か制限をつけないと有限個の係数で表示するのは難しそうですね．

質問 41：「ある n 次正方行列が正則である」ことと同値なもので「その行列が逆行列をもつ」や「その行列の階数が n である」という表現以外にどのように言い表すことができますか．

お答え： 行列式が零でない（第 3 章）

質問 42： 集合 V の限が 0 ベクトルのみの場合，V は線形空間ですか？

お答え： はい．

質問 43： べき零行列として，$k \in \mathbb{N}$ として $A^k = O$ のとき，$A^{k-1} = O$ となることはあるか？ $A^{k-1} \neq O$ だとしたら，その証明は可能か？ どのようにやるのか？

お答え： 反例：$k = 3$，$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすると $A^k = A^{k-1} = O$.

質問 44： 練習量を増やすのは前提として，ほかにも掃き出し法をすばやくこなすコツなどはありますか？

お答え： 別にすばやくこなさなくてもよいのでは？

質問 45： 行列を用いた連立一次方程式の解法は，係数だけを並べることで表示を単純化しているだけで，連立方程式の代入法と違いがないように思います．行列の定義が役に立っていることはあるのでしょうか．

お答え： 前半はそのとおり．でも「代入法」ではなかったのでは？ 山田が中学生のときは「加減法」と習った気がします．後半は「前回の補足」参照．

質問 46： 連立一次方程式をアルゴリズム的に解くというのが掃き出し法の特徴だと思うのですが，多変数の連立一次方程式にはどのようなものがあるのでしょうか．

お答え： 講義で挙げた例は「多変数の連立一次方程式」だと思うのですが．

質問 47： 連立一次方程式を式変形していくなかで，たとえば $m \times k$ 型の行列 A の階数が m なのか m 未満なのかは計算しないと分かりませんか．

お答え： m が小さければ慣れると分かる．慣れるためには大量に計算する．

質問 48： 教科書では $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のことを連立 1 次方程式とよんでいますが，これは $\boldsymbol{x}$ についての方程式であって，連立 1 次方程式とよぶのは誤りではありませんか？

お答え： $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, \dots, x_n]$ の各成分に関する連立 1 次方程式だと思いますが．

質問 49： 前回の授業の質問になりますが，対角行列 $\mathbb{A} = [\alpha_{ij}]$ とした $\alpha_{ij} = \begin{cases} \alpha_i = \alpha_j & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ の α_i と α_j は何を表していますか？

お答え： a_i ではなかったっけ？

質問 50： 今日の授業を聞いてはじめて線形代数を学んでいるという実感がわきました．ありがとうございました．

お答え： どういたしまして．ところで課題は？

質問 51： 先生の PC は Ubuntu 20.04 だと推測したのですが，あってますか．

お答え： はい，20.04LTS です．22.04LTS がリリースされたので様子をみてアップグレードしなければなりません．

質問 52： 4 月 18 日の授業内で熊本大学にいたときすごく大変だったとおっしゃられていましたが，何があったのでしょうか．とても気になります．

お答え： 山田は大変ではなかったのですが，大変なことがおきました．本日お話します．

6　階数・逆行列

- 階段行列と連立一次方程式（テキスト 38 ページ）
- 行基本変形と基本行列（テキスト 35 ページ）
- 行列の階数と逆行列（テキスト 58 ページ）

問題

6-1 n 次正方行列 A に対して，n 次列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を未知ベクトルとする連立一次方程式（同次方程式・斉次方程式）

$$(*) \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を考える．ただし $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルである．

(1) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_r$ が (**??**) の解ならば，スカラ λ_1, ..., λ_r に対して

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{x}_n$$

も $(*)$ の解であることを示しなさい．

(2) A が正則ならば $(*)$ の解は零ベクトルのみであることを示しなさい．

2022 年 5 月 2 日 (2022 年 5 月 6 日訂正)