線形代数学第一 (LAS.M102-10)

同次連立一次方程式・一次独立性

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/05/06

質問から

$P_i^{(n)}(s)$　P_{ij}'　$P_{ij}(s)$

Q: 基本行列 2/3 の黒板での $P_{ij}(s)B$ の説明が黒板を見てもよくわかりませんでした．説明が間違っているような気もします．

A: $P_{ij}(s)$ は，対角成分が 1，(i,j)-成分 $(i \neq j)$ が s，それ以外の成分が 0 の n 次正方行列．
$n \times m$-型行列 B に対して，積 $\boxed{P_{ij}(s)B}$ は B の第 i 行に第 j 行の s 倍を加えてできる行列．

i, j きめうち

$$P_{ij}(s) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & 1 & \cdots & s & \cdots \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$P_{ij}(s) = [p_{\alpha\beta}]$$

$$\boxed{p_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + s\delta_{\alpha i}\delta_{\beta j}}$$

質問から

Q: 授業中に行基本変形は同値変形だとおっしゃっていましたが，それは同値記号でつなげていいということですか？

A: 正確には「対応する連立一次方程式の同値変形」ですね．
連立一次方程式としては同値なので，連立一次方程式の形では同値記号でつなげていけますが，ここでは「行列の同値性」を定義してませんので，行列同士を同値記号でつなぐのはおかしいと思います．

質問から

Q: 黒板 B スライド 5 枚目で，変数の置き方は無限にあるとおっしゃいましたが x が 1 から 5，階数 2 のときは多くても ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通りではないかと考えました．他に何があるのでしょうか．

A: たとえばその例であれば

$$x_1 = t_1, \quad x_2 = -2t_3 + t_5 + b_1, \quad x_3 = t_3, \quad x_4 = 2t_5 + b_2,$$

$x_5 = t_5$

と 3 つのパラメータ (t_1, t_3, t_5) ですべての解を表すことができます．このようなすべての解を表すパラメータのとり方は無限通り，というのがここで述べた意味．

$t_1 = s_1 + s_3$
$t_3 = s_2$
$t_5 = s_1 - s_3$

一次独立（線形独立）・一次従属

テキスト 53 ページ.

線形　線形　一次

linear の訳語

一次式で表される式 ←

線形関係

線形性（写像）

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ （和）

$f(kx) = kf(x)$ （定数倍）

$\left(\begin{array}{l} x, y \in \mathbb{R} \\ f(x) \in \mathbb{R} \end{array} \right)$

のとき これが成り立つのは

$\boxed{f(x) = mx}$

$a_1 \cdots a_r$: n次列ベクトル (行でもよい)

$t_1 \cdots t_r$: スカラー (数)

$t_1 a_1 + \cdots + t_r a_r$: $a_1 \cdots a_r$ の線形結合

$= [a_1 \cdots a_r] \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_r \end{bmatrix}$

$\boxed{a_1 \cdots a_r}$: <u>一次独立</u> linearly independent

$\Leftrightarrow$ ($t_1 a_1 + \cdots + t_r a_r = 0$ となるのは $t_1 = \cdots = t_r = 0$ のときのみ)

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A\,[a_1 \ a_2 \ a_3]$$

正則

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow t_1 = t_2 = t_3 = 0$$

$a_1 \ a_2 \ a_3$ は一次独立

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$b_1 + b_2 - 2b_3 = 0$ 一次従属

b_1, b_2, b_3 は一次独立でない　linearly dependent

同次連立一次方程式の基本解

テキスト 55 ページ，例 2.13

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

基本解

$$\begin{cases} x_1 = t_2 + 3t_4 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = -2t_4 \\ x_4 = t_4 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x} = t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

基本解の一次結合

一次独立

a_1 a_2

$$x = t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

基本解の一次結合

一次独立

一次結合

$a_1 + a_2$

$\|$

$$= t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$