線形代数学第一 (LAS.M102-10)

同次連立一次方程式・一次独立性

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/05/06

問題 6-1

問題

n 次正方行列 A に対して，n 次列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を未知ベクトルとする連立一次方程式（同次方程式・斉次方程式）

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

を考える．ただし $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルである．

1. $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_r$ が (??) の解ならば，スカラ λ_1, ..., λ_r に対して

   $$\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{x}_n$$

   も $(*)$ の解であることを示しなさい．
2. A が正則ならば $(*)$ の解は零ベクトルのみであることを示しなさい．

同次方程式 $Ax = 0$

$A : m \times n$

$x : n \times 1$

・$x_1, \cdots, x_r$: 解

$\Rightarrow \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r$ も解 ($\lambda_1 \cdots \lambda_r$: ん0ろ)

$\because$ $A(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r)$

$= \lambda_1 \underbrace{A x_1}_{0} + \cdots + \lambda_r \underbrace{A x_r}_{0} = 0$

・$m = n$, Aが正則 $\Rightarrow$ 解は $x = 0$ のみ.

$Ax = 0 \Rightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}0$

$\Rightarrow Ex = 0 \Rightarrow x = 0$

$Ax = 0$ $\quad A : m \times n, \quad x : n \times 1$ 基本解

- $\operatorname{rank} A = r$ とすると A の $(n-r)$個の一次独立な解が存在して、任意の解はそれらの線形結合 □

☆ A は階段行列になっているとしてよい (そこまではできる)

$$
A = \begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccccccc}
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\
 & t_2 & & t_4 & & t_6 & t_7
\end{array}
\end{array}
$$

$m = 3$

$n = 7$

$r = 3$

$4 = 7 - 3$

$$
\begin{array}{c}
A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccccccc} & t_2 & & t_4 & & t_6 & t_7 \end{array}
\end{array}
$$

$\boxed{\text{一次独立}}$

4つのベクトル
基本解

$$
\begin{aligned}
x_1 &= t_2 + 2t_4 - 2t_6 - t_7 \\
x_2 &= t_2 \\
x_3 &= 3t_4 - 4t_6 \\
x_4 &= t_4 \\
x_5 &= 2t_6 + 2t_7 \\
x_6 &= t_6 \\
x_7 &= t_7
\end{aligned}
$$

$$
x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_2 \\ t_4 \\ t_6 \\ t_7 \end{bmatrix}
$$

同時連立一次方程式の解

- 解の線形結合はまた解である.

同~~時~~次連立一次方程式の解

- 基本解

$\boxed{\text{非同次}}$ のとき.

$$Ax = b$$

解の一次結合は一般には解でない

$$Ax_1 = b \qquad Ax_2 = b$$

$$\Rightarrow A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 b + \lambda_2 b = (\lambda_1 + \lambda_2) b$$

・ ① $Ax = b$ ② $Ax = 0$

特解 基本解

x_0 $x_1 \ \cdots \ x_s$

すると ①の解は

$$x_0 + \underline{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s}$$

とかける。 ∵ x：①の解 とすると

$$A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = 0$$

∴ $x - x_0$ は②の解 □

Rem

$n=2$ $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

が一次独立 $\iff$ x と y が平行でない

$\boxed{n=3}$ $\quad x, y, z$ のどの2も平行でないとしても一次従属な場合がある.

問題 7-1

行列式

問題

2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ である.

問題 7-2

問題

3 次の列ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t[v_1, v_2, v_3]$, $\boldsymbol{w} = {}^t[w_1, w_2, w_3]$ の内積 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$, 外積 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ を

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} := v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3, \quad \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w} := {}^t\,[v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2$$

で定める．任意の 3 次列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ に対して

- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.
- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$.
- 3 次正方行列 $A = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ が正則であるための必要十分条件は $\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}} \neq 0$ で，このとき

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}}\,{}^t\,[\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]\,.}$$