# 線形代数学第一 (LAS.M102-10)

## 同次連立一次方程式・一次独立性

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/05/06 (2022/04/25 訂正)

# 問題 6-1

## 問題

$n$ 次正方行列 $A$ に対して，$n$ 次列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を未知ベクトルとする連立一次方程式（同次方程式・斉次方程式）

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{$*$}$$

を考える．ただし $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルである．

1. $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_r$ が (??) の解ならば，スカラ $\lambda_1$, ..., $\lambda_r$ に対して

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{x}_n$$

   も ($*$) の解であることを示しなさい．
2. $A$ が正則ならば ($*$) の解は零ベクトルのみであることを示しなさい．

# 同時連立一次方程式の解

- 解の線形結合はまた解である．

# 同時連立一次方程式の解

- 基本解

# 問題 7-1

## 問題

2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ である.

# 問題 7-2

## 問題

3 次の列ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t[v_1, v_2, v_3]$, $\boldsymbol{w} = {}^t[w_1, w_2, w_3]$ の内積 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$, 外積 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ を

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} := v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3, \quad \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w} := {}^t\left[v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2\right.$$

で定める．任意の 3 次列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ に対して

- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.
- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$.
- 3 次正方行列 $A = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ が正則であるための必要十分条件は $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \neq 0$ で，このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}} {}^t\left[\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\right].$$