2022 年 5 月 6 日 (2022 年 5 月 13 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 (LAS.M102-10) 講義資料 7

■お知らせ

- 【重要】今回のご質問の中に前回までの講義資料を見ると答えがあるものが散見されました．次回以降，そのようなご質問は「減点」することにします．採点結果に異議がある場合はメイルにて申し出てください．
- 前回 5 月 2 日の講義前半は録画を忘れていました．ご迷惑をおかけしました．
- スクリーンの件，うまく調整できずご迷惑おかけしています．配慮ありがとうとのコメント複数いただきました．気をつけておきます．

■前回までの訂正

- 講義資料 6, 4 ページ，質問 37 の 1 行目：のぞめばいいのか，ところが ⇒ のぞめばいいのか，というところが
- 講義資料 6, 4 ページ，質問 37 の 2 行目：レッベル ⇒ レベル
- 講義資料 6, 4 ページ，質問 47 の末尾：分かりませんが ⇒ 分かりませんか
- 20220502 黒板 C，最後のページ（問題 6-1）：homogenious ⇒ homogeneous

■授業に関する御意見

- 今回の逆行列の求め方のように，最後に与えられる問題が次の回の内容と関わっているという流れが良いなと思います．
  山田のコメント： そうですよね．
- 授業の途中の休憩はリフレッシュできて友人に質問もできていいですね．　**山田のコメント** つづけましょう．
- 授業の間に休みがあるのは嬉しいです．　**山田のコメント** はい．
- 先生の数学愛が伝わってきて，こちらもやる気がまします．ありがとうございます．　**山田のコメント** そうなのか．
- 声がすこしモゴモゴしていて空調の音もあり，聞き取りずらい箇所がありました．マイクの設定をより聞き取りやすいものにしてくれると嬉しいです．　**山田のコメント** ハウリングとの兼ね合いですね．
- 声が聞きやすくなりました．意見をとりいれていただきありがとうございます．　**山田のコメント** どういたしまして．
- 今回はハウリングが発生していたので，少し音量を下げて頂きたいです．　**山田のコメント** さまざまな意見がありますね．
- 休憩時間にそれまでの授業の黒板を映していただけるとありがたいです．　**山田のコメント** スライドショウか何かで？
- もし可能であれば授業前半のスライドを休憩時間中に T2 スカラーに上げて欲しいです．
  山田のコメント： 面倒くさいので，お約束はできません．前回も同じご希望がありましたね．
- 他の方の質問や意見を見れるのが面白いです．　**山田のコメント** でしょ．
- 数学用語の英語表記を紹介するのには何か意図があるのでしょうか？
  山田のコメント： 知らないと不便なことが多いので（ここで無理して覚えなくてもよいが）見ておいてほしい．
- 数学用語を英語で教えて下さるのが非常にありがたいです．　**山田のコメント** 気が向いたときに．
- 行列の種類ごとに名前おぼえるのが大変そうでした．　**山田のコメント** そうですね．似た名前が多いし．
- 行基本変形の説明が分かりやすかったです．　**山田のコメント** はい．
- 今のところ不満はないです．　**山田のコメント** はい．
- 全然関係ないですが，今回は質問が見切れないよう祈ります．枠に入っていないのは許してください．
  山田のコメント： ちゃんと見えました．
- この学校授業ごとのチャイムがないので終わりが分かりにくいと思うのですが先生は気づいたら授業時間すぎていたということはありましたか？　**山田のコメント** ここ数年はありません．前座噺のようにどこでも切れるように準備しています．
- 一意な授業展開にいつも楽しませてもらっています．　**山田のコメント** Unique ということね．
- ユニークっていい言葉ですね．　**山田のコメント** はい．
- 先生は毎回質問に対する答えをスライドにまとめてくれるので助かります．　**山田のコメント** 活用してください．
- 秀逸な意見の返しが個人的には好きです．これからも続けて欲しいです．　**山田のコメント** 嫌いな人も多そう．
- 先生が Zoom のアイコンに使っている絵は何ですか？　**山田のコメント** 20 年くらい前に娘が描いた似顔絵．
- 山田先生の zoom のアイコンがかわいいですね．　**山田のコメント** はい．
- 先生は勉強のお供に何か口にされますか？ オススメはありますか？　**山田のコメント** のどあめ．
- 素敵な講義ありがとうございました．先生は自分でコーヒーを入れる際，ドリップ派ですか，それともインスタント派ですか？

山田のコメント： こだわらない

- GW はどこか行かれましたか. **山田のコメント** NNTT (新国立劇場)
- ネクタイは何色がお好きですか？ **山田のコメント** なんでもよい.
- 山田先生はサスペンダーがよく似合っていると思います. **山田のコメント** Thanks. よくずれます.
- ベストを来てるとサスペンダーが見れなくて残念です. **山田のコメント** はみ出てます.「来てる」ではなく「着てる」.
- 先生の仕草はかっこいいです！ 僕も先生みたいなステキな大人になりたいです！ **山田のコメント** おすすめしません.

■質問と回答

質問 1： 掃き出しは全ての列について行えない場合でもなるべく多くの列で掃き出すことを目指すのですか？

お答え： はい.

質問 2： ある行列を階段行列に変形するときに，行基本変形と列基本変形を同時に使っても良いのでしょうか.

お答え： ここでは，いいえ．連立一次方程式を解くという場面では，行基本変形は連立一次方程式を同値な方程式に換えるという性質が重要．列基本変形は，対応する連立一次方程式を同値なものに変形しているだろうか？

質問 3： 下の行から 0 の行を作ってランクを定義するとのことですが（山田注：そうなんだっけ？），左の列から 0 を作って階段行列の形の行列を作った場合，この行列には意味がありますか.

お答え： 列基本変形は，正則行列を右から掛けること．ここでは深入りしないが §2.7 をみるとそれなりに意味があることがわかる.

質問 4： 階段行列はそれぞれの行列によって一意的に決まり階段型の行列はそうでないとのことでしたが，階段型の行列は rank もその行列によって決まらないのでしょうか？

お答え： 階段型行列と階段行列の違いを見て，階段型から階段行列に変形する方法を考えれば明らかだと思います.

質問 5： 行ベクトルまたは列ベクトルの中で，階段行列ともいえるものはありますか？

お答え： 定義に従えばよい．例：$[1,2,3,-1,4]$, $[0,1,2,-1,3]$, $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$.

質問 6： 行基本変形の 1 つずつの step は，左から正則行列をかけること，とはどういうことですか.

お答え： A に行基本変形を施すことは，A に左から特定の正則行列 ($P_i(s)$ や P_i, $P_{ij}(s)$) を掛けることである.

質問 7： 基本行列 2/3 の黒板での $P_{ij}(s)B$ の説明が黒板を見てもよくわかりませんでした．説明が間違っているような気もします.

お答え： $P_{ij}(s)$ は，対角成分が 1，(i,j)-成分 $(i \neq j)$ が s，それ以外の成分が 0 の n 次正方行列．$n \times m$-型行列 B に対して，積 $P_{ij}(s)B$ は B の第 i 行に第 j 行の s 倍を加えてできる行列．このことの証明：$P_{ij}(s) = [p_{\alpha\beta}]_{\alpha,\beta=1,\dots,n}$, $B = [b_{kl}]$, $C := P_{ij}(s)B = [c_{kl}]$ と書くと，$P_{ij}(s)$ の定義から $p_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + s\delta_{i\alpha}\delta_{i\beta}$．ただし δ はクロネッカーのデルタ記号．したがって

$$c_{kl} = \sum_{\beta=1}^{n} p_{k\beta}b_{\beta l} = \sum_{\beta=1}^{n} \left(\delta_{k\beta} + s\delta_{ik}\delta_{j\beta}\right)b_{\beta l} = \sum_{\beta=1}^{n} \delta_{k\beta}b_{\beta l} + s\sum_{\beta=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{j\beta}b_{\beta l} = b_{kl} + s\delta_{ik}b_{jl}.$$

とくに $k \neq i$ のとき C の第 k 行は B の第 k 行と一致する．$k = i$ とすると，C の第 i 行は B の第 i 行に B の第 j 行の s 倍を加えたものになっていることがわかる.

質問 8： 行基本変形は掛け算で表されると分かったのですが，その掛け算は可換ですか.

お答え： 意味が取れません．行列の掛け算ですからもともと可換ではないはずですが，何を聞きたいのでしょうか．ちなみに「行基本変形は掛け算で表される」は不満足な表記で「行基本変形は基本行列を**左から**掛ける操作とみなせる」です.

質問 9： 行列 A は行基本変形を繰り返すことにより階段行列 B に変形でき，特に正則行列 P が存在して $B = PA$ と表されるとあったが，行列 A を行基本変形を繰り返して $A \to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_r \to B$ と変形するのであって，なぜ積の形 $PA = B$ に表すことができるのですか.

お答え： 一つひとつの行基本変形は，左から正則行列 $P_i(s)$, P_i, P_{ij} を掛けることに対応しているから.

質問 10： A に行基本変形をくり返して B にしたときに，$B = PA$ と表したときの行列 P は A を B に変換するときにかけた基本行列の積ということですか？

お答え： はい.

質問 11： 工学のための線形代数 P40, P41 で使われている記号をそのまま使わせていただくのですが，行簡約化定理において P というのは A を B に変形する際に用いた行の変換や掃き出し法によって変わるのですか.

お答え： 一般に P に一意性はありません．A が $n \times m$-行列で (1) $\operatorname{rank} A = n$ ならば一意的，(2) $\operatorname{rank} A \leqq n-1$ なら B の一番下の行のスカラ倍を他の行に加えたり，その行自身をスカラ倍しても行列は変化しないので，P の可能性は無限個.

質問 12： 行簡約化定理 $B = PA$（P は基本行列の積である正則行列）の P を求めるには，行基本変形に対応する基本行列の積をとるしかないのですか.

お答え：「しかない」か？ といわれるとなんとも言えません．勘の良い人はひと目でわかる場合もあります．勘を養うには大量の計算.

質問 13： 行基本変形の基本行列は，どのようにして発見されるのでしょうか．今後学習する内容で導けるのでしょうか.

お答え： 基本行列の形を発見的に導けるか？ ということでしょうか．天下り，あるいは「見れば分かる」と思っていただいて結構です.

質問 14： 基本行列を左からかけることと，行基本変形が対応しているとのことですが何故 1 つの操作に 2 つの記述の仕方があるのですか？ どちらか一方でもいいような気がします．また，今回教えていただいた逆行列の求め方は，はき出し法と分割を用いてわかりやすく求めるものであっていますか？

お答え： 前半：何通りもあった方が楽しくない？ なぜプログラミング言語の制御構文に同じことを行うものが複数あるか，日本語や英語に同義語があるか？ 一つのことを何通りも言い換えできると，そこから新しい知見も現れるのでは？ 後半：わかりやすいか

どうかは多分に個人的なものですのであっているかどうかはお答えできません.

質問 15： 逆行列の解説において，標準基底を列ベクトルに分解する（山田注：たぶん「単位行列を列ベクトルに分解」）ことで逆行列を出していましたが，そのとき逆行列をなす 4 つのベクトルの頭についている 1/5 という数にはどのような意味があるのですか.

お答え： スカラ倍.

質問 16： 黒板 C の主張の証明のところで $(A\ E)$ をはき出して $(E\ X)$ がえられたならば $XA = E$ であることを示していますが，なぜこれで，主張：$XA = E \Rightarrow X = A^{-1}$ の証明になっているのですか.

お答え： 主張は「$XA = E$」このことと，$A\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{e}_i$，すなわち「$AX = E$」から $X = A^{-1}$ が得られる.

質問 17： はき出し法をつかえば逆行列が機械的に求まるということが分かりました．ですが，板書の $[A, E] \to [PA(= E), X] = P[A, E]$ という式が何故なりたつのかが分かりませんでした.

お答え： $[A, E]$ に行基本変形を施して $[E, X]$ が得られる．このとき，基本変形に対応する正則行列を P と書くと $P[A, E] = [E, X]$. したがって $PA = E$, $PE = X$ なので $XA = E$.

質問 18： 今回の講義で証明された $[A\ E] \to [E\ X]$ なら $X = A^{-1}$ は $[AX = E]$ なら $[AXX = X]$ と逆行列の一意性より自明なので証明不用（山田注：不要？）じゃないですか.

お答え： $AXX = X$ からなぜ自明なのですか？

質問 19： 逆行列を掃き出し法を用いて求める際に，係数行列が必ず単位行列になるのは，逆行列を持つことが連立方程式の解が 1 つに定まることに対応しているからですか？

お答え： 必ず単位行列になるわけではない．単位行列になる場合が正則．そうでないときは正則でない，したがって逆行列は存在しない.

質問 20： 問題 5-1 は最終的に $A^{-1} = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ (山田注：x は $\boldsymbol{x}$ のことか？）であることを求めるための工程ということですか．また，逆行列を求めたい場合には，用意する基本ベクトルの数を状況に応じて変化させることで求められますか.

お答え： 黒板 C の pdf での 5 ページ目に recipe があるので確認してください.

質問 21： 逆行列について，正方行列でない行列だとしてもうまく工夫すれば逆行列が定義でき，掃き出し法でもとめられるかもと思ったのですが，そういうのはありますか？

お答え： 逆行列の定義 $AX = XA = E$ を満たす X, A の型は何でなければならないか，ということで，A が正方行列でない場合まで定義を拡張することはそれほど自明ではありません．とはいえ「一般逆行列」または「疑似逆行列」という概念があることはありますし，使いみちもあるようです.

質問 22： 授業中に行基本変形は同値変形だとおっしゃっていましたが，それは同値記号でつなげていいということですか？

お答え： 正確には「対応する連立一次方程式の同値変形」ですね．連立一次方程式としては同値なので，連立一次方程式の形では同値記号でつなげていけますが，ここでは「行列の同値性」を定義してませんので，行列同士を同値記号でつなぐのはおかしいと思います.

質問 23： ある行列 A に行基本変形を施して行列 B としたときに，演習の時間では $A \to B$ と表していましたが，$A \Leftrightarrow B$ と同値記号で表してもいいですよね？

お答え： いいえ．同値記号は左右が同値であるときに使います．あなたが「いいですよね」とおっしゃるからには二つの行列 A と B が同値である，ということを定義していなければなりませんが，この講義では未定義ですね．どのように定義しますか？ 明確に定義した上で $\Leftrightarrow$ を用いる，と宣言していただければ同値記号で表してもいいですよ．なお，この件と直接関係あるわけではありませんが前回ひとつ訂正を入れています.

質問 24： A の階段行列 B は A と同値といえますか．またいえる場合，B が単位行列ならば A も単位行列の性質をもつということになりませんか？

お答え：「二つの行列が同値である」ということの（あなたがいまここで使っている語としての）定義を述べてください.

質問 25： 軸に相当しないところを任意定数でおくと，間違いなく連立方程式が解けるというのは経験則ですか.

お答え： いいえ．軸を含まない列は軸を含む列全体と一次従属だから.

質問 26： 黒板 B スライド 5 枚目で，変数の置き方は無限にあるとおっしゃいましたが x が 1 から 5，階数 2 のときは多くても ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通りではないかと考えました．他に何があるのでしょうか.

お答え： たとえばその例であれば

$$x_1 = t_1, \quad x_2 = -2t_3 + t_5 + b_1, \quad x_3 = t_3, \quad x_4 = 2t_5 + b_2, \quad x_5 = t_5$$

と 3 つのパラメータ (t_1, t_3, t_5) ですべての解を表すことができます．このようなすべての解を表すパラメータのとり方は無限通り，というのがここで述べた意味．特定の未知数をそのままパラメータにするわけではありません．たとえば

$$t_1 = 2s_1 + 3s_2, \quad t_3 = s_2, \quad t_5 = 2s_2 + s_3$$

のような置き換えをしてやれば (s_1, s_2, s_3) を用いて解の全体を表示することができます.

質問 27： 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解くとき，係数行列 A をはき出してできた行列の階数と行列 A の行数の差が解に含まれる未知数の個数となるのですか.

お答え： 解というのだから「未知数」を含んではいけないのでは？ 5 月 2 日講義の黒板 B, pdf ファイルの 6 ページ.

質問 28： 拡大係数行列について $[A\ \boldsymbol{b}]$ とカンマ無しで書かれているときと $[A, \boldsymbol{b}]$ とカンマを入れて書かれている時があったのですが，どちらの書き方も一般的にされているものなのでしょうか.

お答え： 山田は区別しません．カンマを入れないとスペーシングが微妙になり，$[A\boldsymbol{b}]$ が何を表すかはっきりしなくなるので，曖昧になりそうなときはカンマを入れています

質問 29： 基本ベクトルを e_1, e_2, e_3, e_4 のように e を使って表しているのはなぜですか？

お答え： "$\boldsymbol{e}$" ですね（e ではなく）．習慣でしょうね．elementary なのか？

質問 30： 基本行列の $P_i(s)$ という表記がよろしくないということですが，どういうことでしょうか．

お答え： $P_i(s)$, P_{ij}, P_i が違うものを表しているのが紛らわしい．厳密には，添字が 1 個，2 個，"(s)" の有無により誤解の余地はないが，似たような記号を異なる意味で使うのはなるべくなら避けたい．

質問 31： 補題というのはある定理に関する補助的な定理ということですか．

お答え： ある定理を証明するための補助的な定理という意味です．

質問 32： 補助的な定理を補題ということのメリットは何ですか．全部定理と呼べばいいのにと思いました．

お答え： その役割に応じて細分することで，主張を含む文脈をわかりやすくする．定理・命題・補題・系...は広い意味で「定理」だが，文脈によって適切なものを選ぶ．

質問 33： 途中 Lemma というラテン語が出てきましたが，研究する上で英語以外の外国語を知らなくて不便だったというご経験はありましたか？

お答え： まず lemma はラテン語起源ですが英語の単語になっています．少なくとも辞書に載っている．本来複数形はラテン語流に lemmata というべきですが，最近は lemmas の方がよく使われるようです．フランス語の論文を読む必要は（自分の分野では）ときどきあります．また，résumé をフランス語で書いたことは 2 回ほどあります．

質問 34： 補題を意味する "Lemma" とは何に由来しているのでしょうか？

お答え： Latin, from Greek *lēmana*, thing taken, assumption (Merriam Webster)

質問 35： §(section) はなぜ S を 2 つ重ね合わせたような形をしているのですか．

お答え： 英語版の Wikipedia，"Section sign" の項に少し説明がありますね．要約すると「諸説あります」

質問 36： ローカルな記号って授業中に出てきたんですが，グローバルな記号もあるんですか？

お答え： たぶん算用数字はグローバルな記号ですし，加法の記号 "+" もそう．

質問 37： $P_i(s)$ はローカルな記号と先生はおっしゃってましたが，普通はどのような記号を使うのですか．

お答え： だれでも共通に使う記号がないから，ローカルに定義して使っています．

質問 38： 参考書やウェブサイトなどで「行簡約化定理」という言葉を目にしないのですが，この教科書だけのローカルな言葉なのですか．

お答え： 多分そうです．

質問 39： 正則行列の "正則" とはどのような意味なのでしょうか？

お答え： ご質問は正則行列の定義ではなく「正則」という単語の意味ですね．広辞苑より (1) 正しい規則 (2) 規則にかなっていること (3) (注：ここでは数学用語としての「正則」を説明しているが，この講義での正則とは別の，複素関数論における正則)．

質問 40： 標準基底の定義が分からないです．

お答え： 黒板 C の 3 ページにその後が書いてあるが，これは先で出てくるので気にしなくて良い（といいませんでしたっけ？）

質問 41： 線形とはなにかと思い調べてみたところ $f(x)+f(y)=f(x+y)$, $f(kx)=kf(x)$ (k は実数) であると出てきました．しかし，今回扱ったかった多元一次式のどこにそのような要素があるのかわからなかったので，あれば教えてください．

お答え：「線形」という言葉は単純に linear の訳語です．お調べいただいたのは「写像 f の線形性」．写像 f が線形写像である（線形である）というのは挙げていただいた関係を満たすこと．一方，一次方程式 a linear equation のことを線形方程式ということもあります．線形空間，線形独立などさまざまな「線形」アイテムが出てきて，全体的に共通のバックグラウンドがあるにしても，それぞれ個別に定義のある概念ですのできちんと定義をおさえていってください．

質問 42： 今日の問題にある $Ax=O$ の解に関する問題は線形性を問うているということでいいですか．そして，この線形性は部分空間の定義の一部になっていると思うのですが，線形性を満たさない空間を行列を用いて表すことはできますか．

お答え： 前半：いいです．後半：行列を用いて表す，という語が曖昧ですが，たとえば $\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ; [x,y]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=1\right\}$ は線形空間になりません．

質問 43： 行列の「右から掛ける」「左から掛ける」とありますが，$AB=CD$ のとき両辺の「真ん中から掛ける」ということはできますか？ $AXB=CXD$.

お答え： 反例：2 次正方行列として $A=E$, $B=2E$, $C=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ とすると，$AB=CD$ $(=2E)$ だが $AXB \neq CXD$.

質問 44： 2022 年 5 月 2 日の講議（山田注：誤字）資料の質問 3 に関する質問があります．「より」を「であるから」に変えれば表現は適切ですか？

お答え： いいえ．「$[\ldots]=[E,d]$ であるから」と言い切るためには d が確定していなければならないのでは？「$[\ldots]=[E,\boldsymbol{d}]$，ただし $\boldsymbol{d}=\ldots.$ したがって...」と，どこかで新しい記号 $\boldsymbol{d}$ の定義を与えておく必要があります．

質問 45： 課題について，漢字のミスがあった場合は減点を行ったとおっしゃっていましたが，内容が成績に影響することがないと書かれている意見の欄における漢字ミスでも減点はあるのでしょうか．

お答え： 漢字のミスは「内容」ではないと思います．

質問 46： ぼくはこの質問では，授業の進め方などに対する質問だと思っているのですが，授業の初めの資料を見ると内容に関する質問もいくつかあるように見えました．こちらの質問で授業の内容に関する質問をしても良いのでしょうか．というのが今回のぼくの質問です．

お答え： いままで 2 回のフィードバックを講義資料でご覧になっているはず．さらに，講義中に「こういうご質問がありました」と屡々言及しています．加えて「質問をいただくと講義に役に立つ」と申しあげたこともあります．

質問 47： 線形代数/微積分学第 2 は選択科目ですが，理系として生きていく上では必要なのでしょうか.

お答え： 理系の定義にもよりますが，そう思います．多くの大学の理工系学部では必修.

質問 48： 授業前に配布された映写資料の右下にあるページに抜けがあるのですが，問題ないでしょうか.（授業の黒板では抜けていませんでした）.

お答え： 問題ありません．事前配布に含めないページがいくつかあります.

質問 49： 20220502 映写資料 B の 4/8 に板書した「3 つの operations：拡大行列に〜」の次の漢字が判別できないので教えていただけますでしょうか.

お答え： 申し訳ありません.「施しても」です.

質問 50： 行列のランクを考えるメリットはなんですか.

お答え： 次元定理（≒ 解の自由度の数え方）．もちろん，君にメリットがあるかどうかは関知しない.

質問 51： 誤りはなかったが，最後にやった主張が難しくてややこしかった.

お答え： 誤りはあったし，最後の主張はまだまだシンプル.

質問 52： 演習の問題がとても難しく感じます．この先単元的にさらに難しくなりそうですか.

お答え： 木曜日の演習でしょうか．あなたの感じ方ですので，こちらではお答えしようがありません.

質問 53： 行基本変形の際，拡大係数行列は毎回示さなければいけないですか？

お答え： 示すとは何をすること？ 数学語でよく使われるように「証明する」こと？ 何を示す？

質問 54： 掃き出し法の途中計算は，行基本変形が分かるように書くべきですか？

お答え： どうでもよい．君自身が検算できる程度にデータを残しておくべきでしょう.

質問 55： 主張は解答の際に毎回証明する必要はありますか.

お答え： 何の解答ですか.

質問 56： $n \times n$ 行列 A について「A は正則」と「$\operatorname{rank} A = n$」と「$\det A \neq 0$」はすべて同値ですか.

お答え： はい.

質問 57： ある正方行列が正則であることの確認方法は逆行列を求める以外にどのようなものがありますか（あれば）

お答え： 講義資料 6，質問 41.

質問 58： ある正方行列が正則であるか否かを "逆行列を見つける" 以外の方法で判別する方法はありますか.

お答え： 講義資料 6，質問 41.

質問 59： 行列の分解は扱いませんか？

お答え： 講義資料 6，前回の補足の 5 つ目.

質問 60： テスト対策において，色々な問題を解いて解法を蓄えることは有効ですか．それとも定義さえ理解していればよく「知らないと解けない」ということにはなりませんか？（前者お場合，何を用いて対策するのが効果的ですか）

お答え： 講義資料 6，お知らせの 2 番目.

質問 61： パソコンの変換で掃き出しが吐き出しになってしまうとおっしゃっていましたが，ひらがなのままではだめでしょうか.

お答え： 講義資料 6, 質問 35.

質問 62： 前回この課題を出しそびれてしまいました…後から出すことは不可能ですか.

お答え： 手間がかかるので受け付けません.

質問 63： 授業内容の誤りを見つけられず，質問も特に無い場合，何をこの紙に書けばいいでしょうか？「特になし」と書くと 0 点がつくので，3 点がもらえる方法をおしえてください.

お答え： 講義資料 1, 1 ページ，下から 9 行目に課題内容があります．課題提出用紙にも課題内容があります．これに答えていただければ結構です．なお，誤りが見つけられない（実際にはある），質問がない（実際には多くの質問がでている）というのは勉強不足と考えます.

7 同次連立一次方程式・一次独立性

- 一次結合（線形結合）; テキスト 53 ページ
- 同次連立一次方程式の解；テキスト 52–53 ページ
- 一次独立性：テキスト 53–54 ページ

問題

7-1 2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ である．

7-2 3 次の列ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t[v_1, v_2, v_3]$, $\boldsymbol{w} = {}^t[w_1, w_2, w_3]$ の内積 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$, 外積 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ を

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3, \quad \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} := {}^t\left[v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1\right]$$

で定める．任意の 3 次列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ に対して

- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.
- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$.
- 3 次正方行列 $A = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ が正則であるための必要十分条件は $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \neq 0$ で，このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}} {}^t\left[\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\right].$$

2022 年 5 月 6 日 (2022 年 5 月 13 日訂正)