線形代数学第一 (LAS.M102-10)

行列式

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/05/09

行列 vs 行列式

問題 7-1

問題

2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は $\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \neq 0$ である.

matrix

$\boxed{\det A}$

A の行列式

determinant

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

$$AX = E$$

問題

3 次の列ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t[v_1, v_2, v_3]$, $\boldsymbol{w} = {}^t[w_1, w_2, w_3]$ に対して

内積 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3,$ スカラ $\boxed{{}^t v w}$

外積 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} := {}^t[v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1]$

で定めると

- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = 0.$
- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}.$
- 3 次正方行列 $A = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ が正則であるための必要十分条件は $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \neq 0$ で，このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}} {}^t[\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}].$$

2・3次の行列式

記号 わるい $\det A = |A|$

$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

定義 (一時的な定義)

- 1 次正方行列 $A = [a]$ に対して $\det A := a$ と定める．
- 2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ に対して
  $\det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ と定める．
- 3 次正方行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$ に対して
  $\det A := (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_3$ で定める．

$\boxed{\begin{array}{l} A = [-5] \\ |A| = -5 \end{array}}$

定理 (一時的な定理)

n 次正方行列 A $(n = 1, 2, 3)$ が正則であるための必要十分条件は $\det A \neq 0$ となることである．

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$v \times w := \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}$$

(ベクトル)

3次のベクトル特有

v_jに関する同次一次式

- $(v \times w) \cdot v = 0 \qquad (v \times w) \cdot w = 0$
- $w \times v = -(v \times w)$ 交代的 alternating skew symmetric
- $(kv + lv') \times w = k(v \times w) + l(v' \times w)$ 線型性

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$(v \times w) \cdot z = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$= v_1(w_2 z_3 - w_3 z_2) + v_2(w_3 z_1 - w_1 z_3)$$

$$+ v_3(w_1 z_2 - w_2 z_1) = (w \times z) \cdot v$$

$$= (z \times v) \cdot w$$

$$= -(w \times v) \cdot z$$

$$= \sum \pm v_{\circ} w_{\circ} z_{\circ}$$

1 2 3
1 3 2

3次の逆行列

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix} \quad 3\times 3$$

$$X = \begin{bmatrix} {}^t(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \\ {}^t(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) \\ {}^t(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \end{bmatrix} \quad 3\times 3$$

$$XA = \begin{bmatrix} {}^t(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} & {}^t(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} & {}^t(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\boldsymbol{c} \\ {}^t(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} & {}^t(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} & {}^t(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\boldsymbol{c} \\ {}^t(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} & {}^t(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{b} & {}^t(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \cancel{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}} & \cancel{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}} \\ \cancel{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} & \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \cancel{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}} \\ \cancel{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}} & \cancel{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}} & \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \end{bmatrix}$$

$$= \{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\}\cdot E$$

行列式

1. 正方行列 A に対応するスカラ；$\det A = |A|$.　! factorial bang
2. 定義… ；(めんどくさい)
   n 次正方行列式は n 個の成分の積の $n!$ 項の（符号付き）和.
3. 1, 2, 3 次の場合は「一時的な定義」と同義.
4. 値を計算する必要性は（試験のときはともかく）稀.
5. 4 次以上の場合，定義に従って値を求めることは殆どない.
6. 「理論上」の重要性.