線形代数学第一 (LAS.M102-10)

行列式

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/05/09

問題 7-1

問題

2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ である.

問題 7-2

問題

3 次の列ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t[v_1, v_2, v_3]$, $\boldsymbol{w} = {}^t[w_1, w_2, w_3]$ に対して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} &:= v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3, \\ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} &:= {}^t\left[v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1\right] \end{aligned}$$

で定めると

- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.
- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$.
- 3 次正方行列 $A = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ が正則であるための必要十分条件は $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \neq 0$ で，このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}} {}^t\left[\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\right].$$

2・3次の行列式

定義 (一時的な定義)

- 1次正方行列 $A = [a]$ に対して $\det A := a$ と定める.
- 2次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ に対して
  $\det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ と定める.
- 3次正方行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$ に対して
  $\det A := (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_3$ で定める.

定理 (一時的な定理)

n次正方行列 A $(n = 1, 2, 3)$ が正則であるための必要十分条件は $\det A \neq 0$ となることである.