

# 線形代数学第一 (LAS.M102-10)

行列式

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

[http:](http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/)

[//www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/](http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/)

東京工業大学

2022/05/09

# 置換・置換の符号

テキスト 75 ページ

$n!$  例  $n$  次の置換  $p = (p_1 p_2 \dots p_n)$

- ▶  $I_n$ : 恒等置換  $(1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n)$
- ▶ 転倒数; 置換の符号  $\text{sgn } p$

1からnまでの整数を  
過不足なく並べたもの

$$(1 \ 2 \ 3)$$

$$(1 \ 3 \ 2)$$

$$(1 \ 4 \ 2 \ 3)$$

$$(1 \ 3 \ 2 \ 4)$$

$$(3 \ 2 \ 4 \ 1)$$

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

$$0! = 1$$

$n$  次の置換  $p = (p_1 p_2 \cdots p_n)$  において,

$i < j$  だが  $p_i > p_j$  (左にある数の方が右の数より大きい)

となる様な組  $(p_i, p_j)$  (転倒対<sup>ついで</sup>ということにする) の個数を置換  $p$  の転倒数といい、本書では  $t(p)$  や  $t(p_1 p_2 \cdots p_n)$  と表す。

$p = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$  転倒数 0

$p = (2 \ 4 \ 3 \ 1)$  転倒数 4  
↑=1  
↑=2  
↑=3

$p = (2 \ 3 \ 4 \ 1)$  転倒数 3

$\frac{\text{sign}}{\text{sgn}} p = (-1)^{\text{転倒数}} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} = \varepsilon(p)$   
置換の符号

# 行列式の定義

テキスト 76 ページ

$$\det A = |A| = \sum (\text{sgn } \mathbf{p}) a_{1p_1} \cdots a_{np_n}$$

✓和は  $n$  次の置換  $\mathbf{p} = (p_1 \dots p_n)$  全体に渡ってとる

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$$

$a_{2p_2}$

$\times$

$$\underline{例1} \quad A = [a_{11}] \quad \underline{n=1}$$

$p = (1)$  のみから 1 次の置換

$$\text{sgn } p = +1$$

$$\det A = \sum_p \text{sgn } p \cdot a_{1p_1} = a_{11}$$

例  $n=2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

2次の置換行列  $P$  の sign

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 0 \quad \sim 1$$

$$\circ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 1 \quad -1$$

$$\det A = \sum (\text{sign } P) a_{1p_1} a_{2p_2}$$

$$= (+1) a_{11} a_{22} + (-1) a_{12} a_{21}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

471  $n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

P	(1 2 3)	0	+
	(1 3 2)	1	-
	(2 1 3)	1	-
	(2 3 1)	2	+
	(3 1 2)	2	+
	(3 2 1)	3	-

$$\det A = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\ - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

2   3

## 問題 8-1

### 問題

- ▶ 上三角行列, 下三角行列の行列式は対角成分の積である.
- ▶ 行列式は行 (列) の入れ替えに関して交代적.
- ▶  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$



# 課題

- ▶ 講義資料や講義の誤りの指摘
- ▶ 講義内容に関する質問

提出：所定の用紙で T2SCHOLA に  
締切：5月11日 10:00