線形代数学第一 (LAS.M102-10)

行列式の性質

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/05/13

問題 8-1

問題

- 上三角行列，下三角行列の行列式は対角成分の積である．
- $\det({}^tA) = \det A$
- 行列式は各列（行）に関して線形．
- 行列式は列（行）の入れ替えに関して交代的．
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

行列の積

数の積

$\det(AB) = \det(BA)$

行列式は

- 行列式は，正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対応して定まる数である．

スカラ．

A が n 次正方行列のとき

$$\det A = \sum_{\boldsymbol{p}} (\operatorname{sgn} \boldsymbol{p}) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$$

総和は n 次の置換 $\boldsymbol{p} = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$ 全体にわたってとる．

定義: 乗算が $n! \times (n-1)$ 個

・100! 個の乗算をするのにどれくらい手間がかかるか?

$$100! \sim 10^{150}$$

・TSUBAME 3.0　　2.5 PFLOPS

2.5×10^{15} 回/s

・$1\,\mathrm{yr} = 3 \times 10^{7}\,\mathrm{s}$

1年で $\sim 7.5 \times 10^{22}$ 回

$$1\,yr = 365 \times 24 \times 60 \times 60\, s$$

$$= 6^{\cancel{4}5} \times 10 \times 2^2 \times 10^2$$

$$= 3^5 \times 2^7 \times 10^3$$

$$= 80 \times 3 \times 2^7 \times 10^3$$

$$= 10^4 \times 2^3 \times 2^7 \times 3$$

$$= 10^4 \times 2^{10} \times 3 \qquad 10^3$$

$$= 10^7 \times 3$$

三角行列

下

対角成分以下

- 正方行列 $A=[a_{ij}]$ が上三角行列 $\Leftrightarrow$「$i>j$ なら $a_{ij}=0$」
- 上三角行列の行列式は対角成分の積.

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & & & \text{※} \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_1 \cdots a_n$$

$$\Leftrightarrow (p_1 \cdots p_n) = (1 \cdots n)$$

$$a_{1p_1} \cdots a_{np_n} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow j \leq p_j$$

$\det A = \sum (\mathrm{sgn}\, \boldsymbol{p}) a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}$ 総和は n 次の置換 $\boldsymbol{p} = (p_1\ p_2\ \ldots\ p_n)$ 全体にわたってとる.

転置

$$A = [a_{ij}] \quad {}^tA = [b_{ij}]$$

$$b_{ij} = a_{ji}$$

- $\det({}^tA) = \det A$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$${}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \det {}^tA = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$= \det A$$

$\det A = \sum(\operatorname{sgn} \boldsymbol{p}) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$ 総和は n 次の置換 $\boldsymbol{p} = (p_1\ p_2\ \dots\ p_n)$ 全体にわたってとる.

$(\mathrm{sgn}\, p)\, a_{1p_1} \cdots a_{np_n}$

$p = (p_1 \cdots p_n)$ を順番に$(1 \cdots n$まで$)$並べかえる

$i < j \quad p_i > p_j$

$a_{q_1 1}\, a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$

$q_k < q_j \quad k > l$

$q = (q_1 \cdots q_n)$: n次の置換

qの転倒数 と pの転倒数は同じ

$(b_{1q_1} \cdots b_{nq_n})$ $\quad [b_{ij}] = {}^tA$

（多重）線形性

- 行列式は各列（行）に関して線形.

$A = [a_1 \cdots a_n]$ (列ベクトル a の分解)

$\det A = \det(a_1, \cdots, a_n)$

$x \longmapsto \det[a_1 \cdots \underset{i}{x} \cdots a_n)$

線形

i 番目以外は固定

x に $F(x)$ を対応させる規則

写像

が線形

$\Leftrightarrow$

$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y)$

i 列目の成分

$\det A = \sum(\operatorname{sgn} \boldsymbol{p}) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$ 総和は n 次の置換 $\boldsymbol{p} = (p_1\ p_2\ \dots\ p_n)$ 全体にわたってとる.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 線形

$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$ (いつでも)

$f(\alpha x) = \alpha f(x)$

$$\Rightarrow f(x) = f(x \times 1) = x \times \underset{\text{''}}{\overset{m}{f(1)}}$$

$$= mx$$

$$\det(a_1 \cdots a_{j-1}, \underbrace{\cancel{x}}_{\alpha x + \beta y}, a_{j+1} \cdots a_n)$$

$$= \alpha \det(a_1 \cdots a_{j-1}, x, a_{j+1} \cdots a_n)$$

$$+ \beta \det(a_1 \cdots a_{j-1}, y, a_{j+1} \cdots a_n)$$

例

- $\det E = 1$
- $\det(sA) = s^n \det A$
- $\det(-A) = (-1)^n \det A$

$E = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

A: n次

◎ 行列式は各行について線形

$\det {}^tA = \det A$