線形代数学第一 (LAS.M102-10)

行列式の性質

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/05/13

問題 8-1

問題

- 上三角行列，下三角行列の行列式は対角成分の積である.
- $\det({}^t A) = \det A$
- 行列式は各列（行）に関して線形.
- 行列式は列（行）の入れ替えに関して交代的.
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

行列式は

- 行列式は，正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対応して定まる数である．

A が n 次正方行列のとき

$$\det A = \sum_{\boldsymbol{p}} (\operatorname{sgn} \boldsymbol{p}) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$$

総和は n 次の置換 $\boldsymbol{p} = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$ 全体にわたってとる．

三角行列

- 正方行列 $A = [a_{ij}]$ が<u>上三角行列</u> $\Leftrightarrow$「$i > j$ なら $a_{ij} = 0$」
- 上三角行列の行列式は対角成分の積.

$\det A = \sum(\operatorname{sgn} \boldsymbol{p}) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$ 総和は n 次の置換 $\boldsymbol{p} = (p_1\ p_2\ \dots\ p_n)$ 全体にわたってとる.

転置

- $\det({}^tA) = \det A$

$\det A = \sum (\operatorname{sgn} \boldsymbol{p}) a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}$ 総和は n 次の置換 $\boldsymbol{p} = (p_1 \ p_2 \ \ldots \ p_n)$ 全体にわたってとる.

（多重）線形性

- 行列式は各列（行）に関して線形.

$\det A = \sum (\operatorname{sgn} \boldsymbol{p}) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$ 総和は n 次の置換 $\boldsymbol{p} = (p_1\ p_2\ \dots\ p_n)$ 全体にわたってとる.

例

- $\det E$
- $\det(sA)$
- $\det(-A)$