線形代数学第一 (LAS.M102-10)

行列式の性質

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/05/13

置換再論

テキスト 79–82 ページ

- n 次の置換 $\boldsymbol{p} = (p_1\ p_2\ \ldots\ p_n)$
- 互換
- 置換の符号 $\operatorname{sgn} \boldsymbol{p}$ は互換の偶奇

$(-1)^{\text{転倒数}}$

$\longrightarrow (-1)^{\text{互換の数}}$

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow p_1 \\ 2 &\longrightarrow p_2 \\ &\vdots \\ 3 &\longrightarrow p_n \end{aligned}$$

を対応させる写像

$X = \{1, \cdots n\}$

XからXへの全単射をn次の置換という

$$\begin{array}{ccc} 1 & \to & 4 \\ 2 & \to & 1 \\ 3 & \to & 2 \\ 4 & \to & 3 \end{array}$$

転倒数3

$$\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

入れかえ　互換

- すべての置換は互換の組みあわせで表せる
- 必要な互換の偶奇は変わらない.
- その符号は転倒数と一致

交代性

- 行列式は列（行）の入れ替えに関して交代的.

$$\det[a_1 \cdots a_i \cdots a_j \cdots a_n]$$

$$= -\det[a_1 \cdots a_j \cdots a_i \cdots a_n]$$

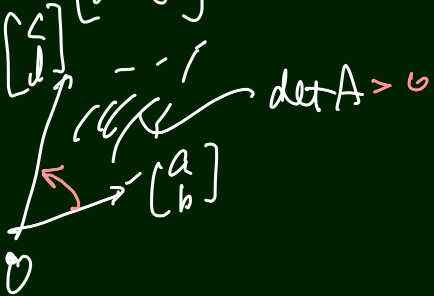
置換：1個だけ互換がふえる.

$\Rightarrow$ sgn：マイナスがつく

$\det A = \sum(\operatorname{sgn} \boldsymbol{p}) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$ 総和は n 次の置換 $\boldsymbol{p} = (p_1\ p_2\ \dots\ p_n)$ 全体にわたってとる.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \det A = ad - bc$$

$$B = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} \qquad \det B = bc - ad$$



積の行列式

- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

$\det A = \sum(\operatorname{sgn} \boldsymbol{p}) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$ 総和は n 次の置換 $\boldsymbol{p} = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$ 全体にわたってとる.

例

- 基本行列 $P_j(s)$ $\quad \det = s$
- 基本行列 P_{ij} $\quad \det = -1$
- 基本行列 $P_{ij}(s)$ $\quad \det = +1$

行基本変形
これらをかけるのは

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} & i & \end{array} \\
j &
\begin{bmatrix}
1 & & 0 \\
 & \ddots & \\
s & & \ddots \\
0 & & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{bmatrix}
1 & & s \\
 & \ddots & \\
0 & & 1
\end{bmatrix}
$$

Eのi列とj列を入れかえたもの

行基本変形

$A \longmapsto P_{ij}(s)A$: det 不変

行（列）基本変形と行列式

行を入れかえ：-1 倍

ある行を s 倍：s 倍

✓ ある行の s 倍を他に加える：1 倍

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = \text{--}\ 対角成分の積$$

問題 9-1

問題

- 2 次正則行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$, 2 次列ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \det[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2] \\ \det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}] \end{bmatrix}$$

  であることを確かめなさい.
- 3 次正則行列の場合はどうか.

問題 9-2

問題

各成分が変数 t の微分可能な関数であるような n 次正方行列 $A(t) = [a_{ij}(t)]$ に対して $\frac{d}{dt}A(t) = A'(t) := [a'_{ij}(t)]$ と定める.

- $n = 2$ のとき,

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)^{-1}\right) = -A(t)^{-1}\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)A(t)^{-1},$$
$$\frac{d}{dt}\det A(t) = \det A(t)\,\mathrm{tr}\left(A(t)^{-1}\frac{d}{dt}A(t)\right)$$

  であることを示しなさい.
- $n = 3$ のとき, 2 の場合と同じ公式が成立することを示しなさい.

次回 5 月 20 日 にお会いしましょう