線形代数学第一 (LAS.M102-10)

行列式の性質

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/05/13 (2022/04/25 訂正)

置換再論

テキスト 79–82 ページ

- n 次の置換 $\boldsymbol{p} = (p_1 \ p_2 \ \ldots \ p_n)$
- 互換
- 置換の符号 $\operatorname{sgn} \boldsymbol{p}$ は互換の偶奇

交代性

- 行列式は列（行）の入れ替えに関して交代的.

$\det A = \sum(\operatorname{sgn} \boldsymbol{p}) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$ 総和は n 次の置換 $\boldsymbol{p} = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$ 全体にわたってとる.

積の行列式

- $\det(AB) = \det A \det B$

$\det A = \sum(\operatorname{sgn} \boldsymbol{p}) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$ 総和は n 次の置換 $\boldsymbol{p} = (p_1\ p_2\ \dots\ p_n)$ 全体にわたってとる.

例

- 基本行列 $P_j(s)$
- 基本行列 P_{ij}
- 基本行列 $P_{ij}(s)$

行（列）基本変形と行列式

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

問題 9-1

問題

- 2 次正則行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$, 2 次列ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \det[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2] \\ \det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}] \end{bmatrix}$$

  であることを確かめなさい.
- 3 次正則行列の場合はどうか.

問題 9-2

問題

各成分が変数 t の微分可能な関数であるような n 次正方行列 $A(t) = [a_{ij}(t)]$ に対して $\frac{d}{dt}A(t) = A'(t) := [a'_{ij}(t)]$ と定める．

- $n = 2$ のとき，

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)^{-1}\right) = -A(t)^{-1}\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)A(t)^{-1},$$
$$\frac{d}{dt}\det A(t) = \det A(t)\,\mathrm{tr}\left(A(t)^{-1}\frac{d}{dt}A(t)\right)$$

  であることを示しなさい．

- $n = 3$ のとき，2 の場合と同じ公式が成立することを示しなさい．