2022 年 5 月 13 日 (2022 年 5 月 27 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 (LAS.M102-10) 講義資料 9

■お知らせ

- 5 月 16 日（月）は木曜日の時間割なので，この科目の講義はありません．3–4 時限に演習があります．
- 5 月 20 日（金）に中間試験（6 月 2 日）の予告をします．皆様お誘い合わせの上ご出席ください．
- 5 月 11 日締切の課題は 76 件のご提出がありました．フィードバックの字が読めないかもしれません．この資料に回答などがない場合はお問い合わせください．

■前回までの訂正

- 20220506 映写資料 C:「4/25 訂正」という字句が入っているようです．誤りです．
- 20220506 映写資料 C, 1 ページ：$\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{x}_n \Rightarrow \lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{x}_r$
(講義資料 6, 20220502 映写資料 C/黒板 C, 20220506 黒板 C の当該箇所も)
- 20220506 映写資料 C, PDF ファイル 9 ページ：$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ のどの 2 も ⇒ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ のどの 2 つも
- 20220509 映写資料 B, 黒板 B, 4/5 ページ：$\det A := (\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)\cdot\boldsymbol{a}_3$ で定める ⇒ $\det A := (\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)\cdot\boldsymbol{a}_3$ と定める
“:=” の意味から「と定める」は不要でないか，とのご意見がありました．取り去っても意味は通じます．体言止めっぽくならないために「定める」を入れています．
- 20220509 黒板 B, PDF ファイル 5 ページ：一欠式 ⇒ 一次式（単に字が汚い？）
- 20220509 黒板 C, PDF ファイル 4 ページ：$\det A =$ の $=$ にコロンをつけて $:=$ となるように書き込みをしたつもりでしたが，階乗に見えてしまった方がいらっしゃいました．申し訳ありません．
- 20220509 黒板 C, PDF ファイル 9 ページ：最後の行（緑字）の最初の項：$a_{11}a_{13}a_{32} \Rightarrow a_{11}a_{23}a_{32}$
- 講義資料 7, 質問 7 の回答，4 行目の式の最右辺：$b_{kl}+\delta_{ik}b_{jl} \Rightarrow b_{kl}+s\delta_{ik}b_{jl}$
- 講義資料 7, 質問 11：定理いおいて ⇒ 定理において
- 講義資料 7, 質問 33 の回答：lemata ⇒ lemmata
- 講義資料 7, 質問 48：問題ないでようか ⇒ 問題ないでしょうか.
- 講義資料 7, 質問 51 の回答：主張ままだまだ ⇒ 主張はまだまだ

■授業に関する御意見

- 録画のためとはわかっておりますが，zoom を利用して授業しているのでハイクレックス（原文ママ：ハイフレックス）形式にしてもいいのかなと思いました．ちなみに授業体系は先生が勝手に決められるものなのですか？
  山田のコメント： 仰るとおりだとは思うのですが 100 番台は「対面」に統一するよう指示がきています．複数クラスであまり違った形式ではまずいらしいので，URL は公開していません．
- 5 月 6 日の黒板 B の 6 や黒板 C において r と r (後者は下に短い横線を入れた) という 2 つの記法で r を書かれていましたが，記法を変えると別の記号として扱われてしまうのではないでしょうか.
  山田のコメント： そうですね．気をつけましょう．b なども記法のゆらぎがありますね.
- なかなか行列式の定義を理解できなかったのですが，講義を聴いてなんとなく分かってきたような気がしました.
  山田のコメント： 本当？
- 新しく覚えることが増えて少し大変になってきました.　**山田のコメント** そりゃそうだ.
- 今日の授業はちょっと難しかったです.　**山田のコメント** よかった．大学まで来て易しいことばかりじゃつまらないよね.
- 空調の下の席の者です．やはり聞こえにくい箇所があります．ハキハキ話していただけると助かります.
  山田のコメント： 了解．聞こえにくいようでしたら席を移動してください.
- 今さらなのですが，中間試験を 6 月 2 日にしていただきありがとうございます.　**山田のコメント** どういたしまして.
- もう期末になるのかと少しビビっています.　**山田のコメント** 山田もです.
- テスト楽しみです.　**山田のコメント** 私もです.
- 段々と出席率が減少しているのは何故なんでしょうか？ 私の勘違いでしょうか.
  山田のコメント： 多分減ってます．講師の不徳の致すところであります.
- 授業中に細かい復習をさりげなくしてくれるのが非常に助かります.　**山田のコメント** はい.
- 最近体調不良で出席できていないので黒板資料のありがたみを感じている.
  山田のコメント： 体調不良，濃厚接触などで出席出来ない方向けを想定しています.
- T2SCHOLA に板書をあげてくださるのがありがたいです.　**山田のコメント** なんとか続けます.

- 可能であれば黒板の字をもう少し丁寧に書いていただきたいです． **山田のコメント** 了解．
- スクリーンがとても見やすかったです． **山田のコメント** ではこの形で行きましょう．
- 50 分くらいで集中力が落ちてきてしまうので，途中で休憩を挟んでいただけるのはとても嬉しいです． **山田のコメント** はい．
- 休憩時間にもっと先生の雑談が聞きたいです．
  山田のコメント：黒板を休憩時間にアップしてほしい，というご要望に答えているので忙しくなってしまいました．
- 今のところ特に不満な点はありません． **山田のコメント** はい．
- 提出用紙の txt のやつ，何のアプリですか． **山田のコメント** LuaLaTeX
- 間違いを見つけるのが苦手なので，重箱のすみを突くような誤字を指摘しました．すみません．
  山田のコメント：読んでいただいている，ということがわかりますのでよいです．
- 階乗の記号をびっくりというところに親近感が湧きました． **山田のコメント** そう言わないの？
- $0! = 1$ が $1! = 1 \times 0!$ から来るのはなるほどと思いました． **山田のコメント** 知らなかった？
- $|A|$ を絶対値って言ってしまいそうです． **山田のコメント** 文脈をみないとね．
- 数学者の間では sin, cos は筆記体表記が一般的なんですか？
  山田のコメント：そんなことはなさそうですね．むしろ昔は高等学校の先生に多かったと思います．印刷された文章だと立体 “sin, cos” ですね．“sin, cos” だと誤りのようです．
- 先生は何の研究をしてますか？ **山田のコメント** `https://nrid.nii.ac.jp/ja/nrid/1000010221657/`
- 外積の説明の時に物理の話も絡めて説明していましたが，先生は物理学にも精通しているのですか．
  山田のコメント：いいえ．1 年生で習うこと程度なら...
- 先生はどのような少年だったのでしょうか． **山田のコメント** ごく普通．
- 五月病の時期がやってきましたね．山田先生は授業中，つねに元気そうですごいと思います． **山田のコメント** 演技力がある．
- 先生も寝てはいけない場面で強烈に眠気に襲われてしまうようなときがあると思いますが（なかったらすみません），そのような場合にどう対処していますか． **山田のコメント** 寝ます．
- 半袖でもサスペンダーはしますか？ **山田のコメント** 半袖を着ません．
- 授業の内容からは外れてしまうのですが，先日入試の得点開示があり，4 科目の中で数学が一番点数が低くて原因は複素数だと思っています．いまのところ行列の成分が複素数，という問題がほとんどなくて安心しています．
  山田のコメント：まあ，18 世紀の人でもないし，複素数は普通の数，ということでいいですよね．
- 先生は入試の数学の採点しましたか？ **山田のコメント** ひ・み・つ ♡
- 先生は入試問題の作成に関わったことはありますか？ **山田のコメント** 国家機密
- 授業ありがとうございました．前回この用紙を出し忘れてしまい悔しいです．テスト頑張ります． **山田のコメント** はい．
- 素敵な講義ありがとうございました．講義中に先生と目があうとドキッとします．これは恋でしょうか．
  山田のコメント：体調をチェックしておきましょう．
- 落語をお聞きになるのですか？ ちなみに僕は立川志の輔さんの創作落語，桂歌丸さんの古典落語が好きです．ぜひ聞いてみてください． **山田のコメント** なるほど．ずいぶん前に亡くなったけど春風亭柳昇はよかったですね．先代の三遊亭圓楽の「死神」もなかなかよかったです．上方だと桂枝雀が一世を風靡したころによく（ラジオで）聴いていました．
- 個人的には英語より C 言語の方が読めるので，C 言語での説明も欲しいです．その方が人間だけでなくコンピューターも理解できますし． **山田のコメント** なるほど．たとえば「行列式の定義」を C 言語で書くとどうなるんでしょうね．

■質問と回答

質問 1： 連立一次方程式における基本解と特解の違いは何ですか．

お答え： 同次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の r 個の解 $\boldsymbol{x}_1$, ..., $\boldsymbol{x}_r$ が一次独立であって，方程式の任意の解がこれらの線形結合で表されるとき $\{\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_r\}$ を基本解という．また非同次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たすひとつの $\boldsymbol{x}_0$ を特解という．方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の任意の解は，特解 $\boldsymbol{x}_0$ と同次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解 $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r\}$ を用いて $\boldsymbol{x}_0 + \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{x}_r$ と書ける．

質問 2： 20220506 黒板 B の 5/6 の板書で「一次式で表される等式 線形関係」と書いてあるのですが，「一次式で表される関係のことを線形関係」というべきではないですか？

お答え：「関係」とはなんでしょうか．ここではその関係が「等式」なので線形関係とは一次の等式のこと，と定義しています．

質問 3： 何回か前の授業で，$AX = E \Rightarrow XA = E$ の証明をしていて，それは P. 58 定理 2.10 に相当すると思うのだが，p. 58 の証明の下から 3 行目 “よって” の意味が理解できない．

お答え： もしも B が $\boldsymbol{0}$ となる行をもつならば BX も $\boldsymbol{0}$ となる行をもつ．すると $P = BX$ が正則であることに矛盾する．したがって B は $\boldsymbol{0}$ となる行をもたない階段行列．とくに B は正方行列だから $B = E$.

質問 4： 外積が用いられるのは 3 次元の場合だけですか？ また外積の計算方法は丸暗記するしかないのですか？

お答え： 前半：「用いられる」ではなく「定義される」．後半：物理の教科書などにない？ この講義では余因子展開を用いて説明します．

質問 5： 外積の操作はわかったのですが，外積は物理も登場し度々疑問に思ってきたものですが，外積とは何を表すのですか？

質問 6： 外積の図形的な意味はどんなものがありますか．

お答え： $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に直交し，大きさは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形の面積，$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\}$ が右手系となるような向きのベクトル．

質問 7： 外積のベクトル向きは右ねじの法則の親指の向きだということは知っているのですが，外積の大きさは何を意味しているのですか．また，あえて行列式に図形的な意味を持たせようとしたとき，例えばどのような意味がありますか．それとも全く意味をなしませんか． **お答え：**前半は上の質問と回答参照．後半：たとえば 3 次の行列式は 3 つの列ベクトルが張る平行六面体の体積（に符号をつけたもの）．これを梃子に，高次元の図形の体積を行列式を用いて定義する．

質問 8： 外積の定義も行列の積と同様に煩雑だと思うのですが，あのように定義することに何かメリットがあるのでしょうか.

お答え： はい.

質問 9： 単に「置換」というとある集合からその集合への全単射のことをさすようですが，「n 次の置換」というのは $\{1,2,\dots,n\}$ から $\{1,2,\dots,n\}$ への全単射をさすのですか？ **お答え：**はい.

質問 10： 置換では「異なる」n 個のものであることが重要で，その n 個のものは自然数ではなくてもよいはずですが，例えば 3 次の置換 $(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$ を $(1,2,3)$ に対応させるように分かりやすい自然数の順列で扱うのことの方が多いのでしょうか.

お答え： そうですね．何でも良いのですが，ここでは行列の成分の添字に使うので $\{1,2,\dots,n\}$ の置換にしておかないと使えません.

質問 11： なぜ転倒数が奇数だと行列式での符号が負で，偶数だと正なんですか.

質問 12： $\operatorname{sgn}(\boldsymbol{p})$ はなぜ転倒数が偶数のとき $+1$ で奇数のとき -1 なのでしょうか．逆ではダメなのですか？

お答え： それが定義だから．どうしてそう定義すると気持ち良いか：n 次置換全体（n 次対称群と呼ばれる）から $\mathbb{Z}_2=\{1,-1\}$ への準同型となる（気にしないでください)．恒等置換 $\{1,2,\dots,n\}$ の符号が -1 だと気持ち悪くないですか？

質問 13： $\operatorname{sgn}\boldsymbol{p}=(-1)^{t(p)}$ ということでしたが，転倒数をしらべるだけでなぜ $\operatorname{sgn}\boldsymbol{p}$ が分かってしまうのでしょうか.

お答え： わかるのではなく，これが $\operatorname{sgn}\boldsymbol{p}$ の定義.

質問 14： $\operatorname{sgn}\boldsymbol{p}$ は $+1$ でなく 1 と書いてはいけないのでしょうか. **お答え：**いいですよ.

質問 15： 転倒数は行列式以外でも使いますか？ あるのであればどこで使うのですか？

お答え： 転倒数自体より「置換の符号」を使います．たとえば「微分形式」（いまは知らなくてもよろしい）などで.

質問 16： 僕は転倒数を数えるときにミスが多く苦手なのですが，これを楽に求める公式はないのでしょうか.

お答え： 置換の符号，という意味では置換を「互換の合成」と考えて (テキスト 79 ページから 81 ページ) の偶奇を考えるのが自然なのですが，これも簡単には求まりませんね.

質問 17： 偶置換や奇置換の判定をすべての組を調べずに行う方法はありますか. **お答え：**互換の合成で表す.

質問 18： 巡回置換の教科書に書いてある部分について $t=(i,i+1,\dots,j)=(\ )$ となっているところについて，2gy という目が j, i となっているところは $i\sim j$ で巡回するためであるという理解で良いのでしょうか？ **お答え：**理解はどうか知らないがよい.

質問 19： なぜ転倒数は “転倒” という言葉を使うのでしょうか. **お答え：**大小が入れ替わっている箇所の数だからでは？

質問 20： 転倒数はなぜ定義されているのですか．転倒対の個数にどのような意味があるのかよく分からないです.

お答え： はい，転倒対の個数自体に意味はあまりないと思います．その偶奇に意味があってそれが置換の符号.

質問 21： 転倒数がわかると何がうれしいのですか. **お答え：**行列式が定義できる.

質問 22： 今回の講義で先生は 3 次正方行列の行列式の置換回数について $(3,2,1)$ を 3 としていましたが，1 と 3 を入れ替えて 1 回の置換とかんがえてもよろしかったですよね. **お答え：**互換の回数という意味ではそれでよい．転倒数は 3 です.

質問 23： 置換 $\boldsymbol{p}$ に対して辞書式に番号をつけてその番号から対応する符号を得る写像があったら面白そうだなと思いました.

お答え： ここに書いてあること自体が写像の定義ではないでしょうか.

質問 24： 行列式を定義するメリットはなんですか. **お答え：**正則性の判定条件が成分の多項式で書ける．重積分の変数変換の公式が記述できる．でもそれが君にとってメリットかどうかはわからない．講義資料 7, 質問 50 参照.

質問 25： 行列式の定義を正確に覚えてなくても大丈夫なのでしょうか. **お答え：**必要なら参照できればよい.

質問 26： 行列式を計算して値をもとめる必要性はほとんどないとおっしゃっていましたが，行列式の値自体になにか意味があるのでしょうか.

質問 27： 授業中に「行列式を実際に計算することはあまりない.」と仰っていましたが，行列式はどのようなときに何のために使われるのですか.

お答え： 訂正：値が必要な場面として「重積分の変数変換の公式（微分積分学第一)」．それとも関係しているが，体積と関連している.

質問 28： 行列式はスカラで出るとありますが，複素数の行列式では実数で出ないこともあると思います．複素数はベクトルでなく数ですか？ 自分はベクトルと考えていましたが，絶対かずですよね.

お答え： 行列を考えるときの数の範囲をどこまでにするゲームのルールが曖昧ですが，主に実数，複素数の範囲で考えます．考えている範囲の数のことをスカラといいます．複素数自体はベクトルとも行列とも解釈することはできますが，行列の成分になったらそれは数と思ってください．一度言及したかもしれませんが「スカラ」は「大きさだけを持つ量」ではなく一つの数のことです.

質問 29： 行列式は，後の内容で役立つときが来るのでしょうか？

お答え： はい，としか言いようがありません.「後の内容」という語の意味が曖昧なのでなんとも言えませんが.

質問 30： n 次正方行列 A において，A の行列式 $\neq 0 \Leftrightarrow A$ は正則行列ということですか？ なぜ教科書 p. 76 のように行列式を定義すれば上記の関係が成り立つのか分かりません. **お答え：**それを次回やる.

質問 31： 連立方程式（略. 2 次正方行列，3 次正方行列が係数となるもの）を解いてみると解の分母に係数行列の行列式が現れました．一般に（略. n 次正方行列の場合）の解の因数には (係数行列の行列式)$^{-1}$ が含まれるようになっているのですか.

お答え： はい．それがしばらく後でやる Cramer の公式.

質問 32： 逆行列を求めるときは，掃き出し法の方が行列式を用いるよりも早いように感じます．将来的にどっちの方法に慣れておくべきですか. **お答え：**求める，という意味なら掃き出し法．行列式を用いた表示は理論上有用.

質問 33： 行列式の定義 $\det A=\sum(\operatorname{sgn}\boldsymbol{p})a_{1p_1}a_{2p_2}\dots a_{np_n}$ の a_{mp_m} の部分が何を表しているかよく理解できませんでした.

お答え： $A=[a_{ij}]$ の (m,p_m)-成分.

質問 34： 行列式の定理（原文ママ：定義の誤り)「和は n 次の置換 $\boldsymbol{p}=(p_1\ \dots\ p_n)$ 全体にわたってとる」とありましたが $\boldsymbol{p}$ 全体とは $p_1\sim p_n$ を入れ替えた考えうる $\boldsymbol{p}$ 全体ということですか？ それを $\displaystyle\sum_{\boldsymbol{p}}$ と表せるのですか.

お答え： 「定義」「定理」という語をきちんと覚えてください．その上で，$\boldsymbol{p}$ 全体ではなく置換 $\boldsymbol{p}$ 全体です．すべての置換を考えるのです．$\sum_{\boldsymbol{p}}$ だけで意味があるのではなく，下の文との組で意味をもつので，「表せるのですか」の部分は「それだけでは表せない」．

質問 35： 基本行列 $P_i(s)$ について $s = 0$ を含まない理由は，基本行列が行基本変形に対応するものとして考えられたからということですか？ **お答え：**はい．

質問 36： $\det A$ について 1 ∼ 3 次正方行列は一般化しましたが，4 次以上についても扱うことは多いですか．

お答え： はい．（1 ∼ 3 次と次数を制限しているのは「一般化」ではないのでは？）

質問 37： 4 次以降の正則行列の逆行列の公式は存在しますか？ **お答え：**はい．

質問 38： 教科書 53 ページの下の方で $\boldsymbol{a}_1t_1 + \boldsymbol{a}_2t_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_nt_n = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{t} = {}^t[t_1, \ldots, t_n] = \boldsymbol{0}$ とあるが，${}^t[t_1, \ldots, t_n] = \boldsymbol{0}$ でなくて $[t_1, \ldots, t_n] = \boldsymbol{0}$ でもいいのではないか．

お答え： いいです．ここで列ベクトルにしたのは，最初の線形関係を $[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n]\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$ と列ベクトル $\boldsymbol{t}$ を用いて書きたかったため．

質問 39： 線形という言葉と一次という言葉は同じという意味ということですが，線形数学では一次の式として扱えるものだけでできているということですか． **お答え：**当面そうです．行列式の定義自体は 1 次式ではありませんが．

質問 40： 大学受験で，主に関数の符号を表現するために sgn を用いていた予備校の先生がいたのですが，用法としてそれは正しいですか？ ex) $f'(x)$ の分子を $g(x)$ とおけば $\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn} g(x)$ であるから...

お答え： そういう使い方もあります．文脈依存．文脈で判断できないような用法なら説明してから使うのがよいと思います．

質問 41： 行列式の絶対値を考えたい場合はどのように表記するのですか．そもそも行列式の絶対値が必要となる場面はあまりないのでしょうか． **お答え：**山田は $|\det A|$ と書きます．多くの場合，それがでてくる文脈では，行列式の記号として $|A|$ を使わないようにしています．もちろん $||A||$ と書く人もいます．いずれにせよ一言説明をいれるのが良さそうですね．ちなみに行列式の絶対値は「重積分の変数変換の公式」（微分積分学第一）に現れます．

質問 42： 授業で出てきた $\begin{bmatrix} {}^t(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \\ {}^t(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) \\ {}^t(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \end{bmatrix}$ という行列は転置をせずに表すことはできませんか？

お答え： たとえば $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} := [\ldots]$ と外積を行ベクトルで定義してやれば転置しないで書けますね．くだらないと思われるかもしれませんが，3 次行ベクトル全体の集合は，3 次列ベクトル全体の集合（線形空間）の双対空間と考えるとこの置き方が自然に思えてきます（ここでは気にしないでください）．

質問 43： 3 次正方行列の行列式を求めるときに，${}^t(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a}$ としたのは，この式の解が（成分が一つの）行列になるのを嫌い，スカラーで表すためでしょうか． **お答え：**とくにそういう意図はありません．どちらでもよいです．ちなみに「この式の解」は「この式の値」でないとおかしいと思います．

質問 44： 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ をクロスと読んでいましたが，内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ の $\cdot$ にも読み方があるのですか． **お答え：**dot.

質問 45： 内積や外積の「内」「外」にはなにか意味がありますか？

お答え： よくしらないです．inner product, outer product の訳語と思われますが．

質問 46： n 次正方行列の行列式をコンピュータで定義に従って求めたときの所要時間が $n!$ に比例したとおっしゃっていたことについて，処理が $n!$ 実行されるのは理解しましたが 1 回の処理内容もまた n に応じて変化するので，理論的にはもっと急な変化になるのではないでしょうか． **お答え：**乗算の回数は $n! \times (n-1)$ 回ですね．

質問 47： 先生が授業でおっしゃっていた線形性についてもう一度説明いただけるとありがたいです． **お答え：**どこがわからなかった？

質問 48： 講義中に，無限和は足す順序を変えると結果が変わることがあるとおっしゃっていましたが，その例を教えてください．

お答え： 例えば，杉浦光夫「解析入門 I」（東大出版会）V §5, 例 4 (387 ページ)．

質問 49： 最先端の科学を母国語で学べるのはすごいことだという話の一例で，韓国語にはある学術用語に対応する言葉がないとおっしゃってましたが，何故作られないのでしょうか．日常語ならまだしも術語なら作ればそれなりに浸透しそうな気がします．

お答え： その方の発言なので真偽はわかりませんが，訳語をつくるというのはそれなりに強い意志が必要です．最近の術語はほとんど日本語になっていませんね．

質問 50： なぜ先生は ubuntu を使っているのですか． **お答え：**Debian より楽だから．Windows が使えないから．

質問 51： 連立方程式の行列とかより正則行列とかの方が難しくないですか？ **お答え：**とか，とはなにを指していますか．連立方程式にあらわれる行列のことですか？ その行列が難しい・難しくないとはどういうことですか？

質問 52： 掃き出しの解けない問題を文字を使うときに，2 つ以上の文字を使うときの判断のしかたがわからない．

お答え： 解けない問題とはなんでしょう．いままであつかった連立一次方程式の問題で解けないものはありましたか（ある程度想像はつきますが，あなたの言葉では通じません）．

質問 53： 方程式の解はこれから行列式で表すことの方が多くなるのですか？

お答え： そうなんですか？ これまでの授業では一度も行列式で表していませんね．

質問 54： うれしいことではあるのですが，なぜ今このタイミングでウッドデッキが解放されたのでしょうか．

お答え： わかりません．ちなみに「開放」ではないでしょうか．

9 行列式の性質

- 行列式の性質（テキスト 83 ページから 95 ページ）

問題

1
- 2 次正則行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$, 2 次列ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}\det[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2] \\ \det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}]\end{bmatrix}$$

  であることを確かめなさい.
- 3 次正則行列の場合はどうか.

2 各成分が変数 t の微分可能な関数であるような n 次正方行列 $A(t) = [a_{ij}(t)]$ に対して $\frac{d}{dt}A(t) = A'(t) := [a'_{ij}(t)]$ と定める.
- $n = 2$ のとき,

$$\frac{d}{dt}\big(A(t)^{-1}\big) = -A(t)^{-1}\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)A(t)^{-1}, \qquad \frac{d}{dt}\det A(t) = \det A(t)\operatorname{tr}\left(A(t)^{-1}\frac{d}{dt}A(t)\right)$$

  であることを示しなさい.
- $n = 3$ のとき，2 の場合と同じ公式が成立することを示しなさい.

2022 年 5 月 13 日 (2022 年 5 月 27 日訂正)