線形代数学第一 (LAS.M102-10)

ベクトルと図形

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/05/30

座標平面の直線

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} ; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{座標平面}$$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

直線

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underbrace{y = 2x + 1}_{\text{条件}} \right\} \cdots \text{直線 } y = 2x + 1$$

略記

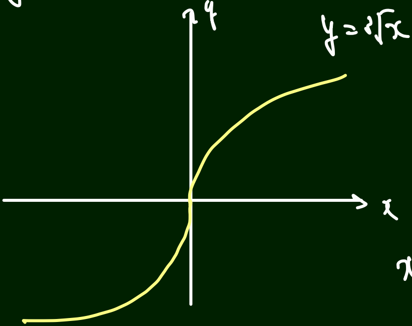
- $ax + by + c = 0 \quad ; \quad (a, b) \neq (0, 0)$
- $y = ax + b$ ← すべての直線を表すわけではな

$b = 0$ とおけば x軸に垂直な直線を表せる

パラメータ表示

- $\begin{cases} x = \alpha t + p \\ y = \beta t + q \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{x} = t\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{p} \quad (t \in \mathbb{R})$

$y = \sqrt[3]{x} \quad x \in \mathbb{R}$



$x = 0$ で微分可能でない

$(\because) \quad \dfrac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}} \xrightarrow[h \to 0]{} +\infty$

$x = 0$ でグラフは y 軸に接する.

$ax + by = c$ （直線の方程式）

$\{ \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{c} \}$: 直線

$A = [1, 2]$ $\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\mathbf{c} = [c]$

拡大係数行列 $\tilde{A} = [A, \mathbf{c}]$

$= [a, b, c]$

$(a, b) \neq (0, 0)$ のとき

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rak} \tilde{A} = 1$

y 任意

$\tilde{A} \sim [1, * \ *]$

$x = \star y + \star$

$[0, 1 \ *]$

x は任意

$\begin{cases} y = * \\ \cancel{x = *} \end{cases}$

$\tilde{A} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & p & q \end{bmatrix}$

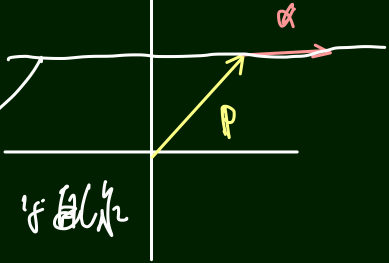
$$\begin{cases} x = -pt + q \\ y = t \end{cases}$$

t：任意

パラメータ表示の仕方は
ひと通りじゃない、

$$\boldsymbol{x} = t\begin{bmatrix} -p \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= t\alpha + \boldsymbol{p}$$



$\boldsymbol{p}$を通りαに平行な直線

座標空間の平面・直線

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} ; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

平面 $\quad ax + by + cz = d$

$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

$\hat{A} = [a, \ b, \ c \ \vdots \ d]$ に掃き出し法を適用

いいかえれば $\quad s, t$: 任意 $\quad$ 一次方程式

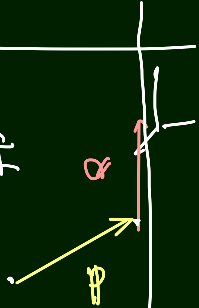
$$\tilde{A} = [1 \quad p \quad q \quad r]$$

$$\begin{cases} x = -sp - tq + r \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -p \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

・ $x = s\alpha + t\beta + p$ 　平面のパラメータ表示.

直線：　$x = t\alpha + p$
パラメータ表示



・2つの平面の交わり.

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ a'x + b'y + c'z = p' \end{cases}$$

$$\boxed{Ax = p}$$

☆ $\mathrm{rank}\,A = 1$ なら 2平面は平行.

☆ $\mathrm{rank}\,A = 2$ ： 1パラメータをふくむ解がある.

直線と平面の交わり　3本

直線と直線の交わり　4本

(ねじれの位置)

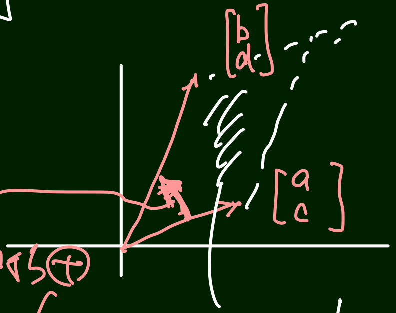
$\begin{bmatrix} A & \Phi \end{bmatrix}$ 4になりうる.

rank：多くとも 3

2 次の行列式

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$\det A$



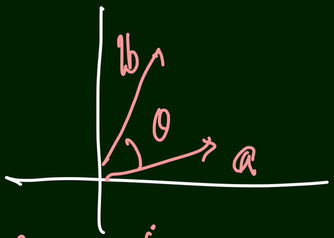
反時計回りなら +

$$\boxed{\det A = \pm S}$$

$$S = |\det A|$$

絶対値

$$(a^2+c^2)(b^2+d^2) - (ab+cd)^2$$
$$= (ad-bc)^2$$



$$|a|^2|b|^2-(a\cdot b)^2=(\det(a\ b))^2$$

$$\|$$

$$(|a||b|\sin\theta)^2$$

3 次の行列式

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$x \times y = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$x \times y = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det A_{13} \\ -\det A_{23} \\ \det A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{33} \end{bmatrix}$$

$$(x \times y) \cdot z = \det(x, y, z)$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$(x \times y)\cdot z = \det(x, y, z)$$ スカラー三重積

$$= \det(y, z, x) = \det(z, x, y)$$

$$= (y \times z)\cdot x = (z \times x)\cdot y$$

<u>Fact</u>　x, y が一次従属 $\Rightarrow$ $x \times y = 0$

$\because$　$\alpha x + \beta y = 0$ となる $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ がある．$\alpha \neq 0$ ならば $x = -\frac{\beta}{\alpha} y$

$$(x \times y)\cdot z = -\frac{\beta}{\alpha}\det(y, y, z)$$

任意

$(x \times y)$

$$= 0 \Rightarrow x \times y = 0$$

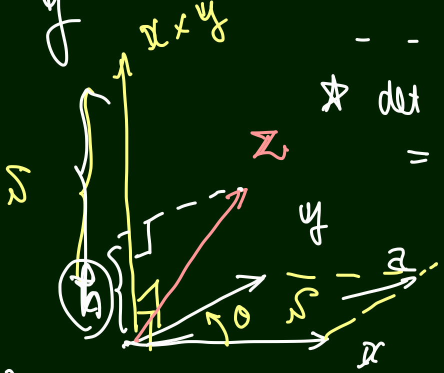
$$|x \times y|^2 = |x|^2 |y|^2 - (x \cdot y)^2$$ (Exercise)

- $x \times y \perp x$ $\qquad x \times y \cdot x = \det(x, y, x) = 0$

  $x \times y \perp y$

右手系

☆ $\det(x, y, x \times y) = |x \times y|^2 > 0$



平行6面体 $x\ y\ z$ の体積

$$\det(x, y, z) = x \times y \cdot z = \pm Sh$$