線形代数学第一 (LAS.M102-10)

余因子展開

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/05/20

行列式は

- 行列式は，正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対応して定まる数である．
- 上三角行列の行列式は対角成分の積.
- $\det({}^tA) = \det A$
- 行列式は各列（行）に関して線形.
- 行列式は列（行）の入れ替えに関して交代的.
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

A が n 次正方行列のとき

$$\det A = \sum_{\boldsymbol{p}} (\operatorname{sgn} \boldsymbol{p}) a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}$$

総和は n 次の置換 $\boldsymbol{p} = (p_1 \ p_2 \ \ldots \ p_n)$ 全体にわたってとる．

余因子

$A = [a_{ij}]$: n 次正方行列.

- $A_{ij} = A$ の第 i 行，第 j 列を除いた行列　A の (i, j) 小行列
- $|A_{ij}| = \det(A_{ij})$: A の (i, j) 小行列式
- $\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j}|A_{ij}|$: A の (i, j) 余因子
- $\widetilde{A} := {}^t[\tilde{a}_{ij}]$: A の余因子行列（テキスト 100 ページ）

余因子展開

$A = [a_{ij}]$: n 次正方行列.

- $A_{ij} = A$ の第 i 行，第 j 列を除いた行列　A の (i,j) 小行列
- $\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j}|A_{ij}|$: A の (i,j) 余因子

定理 (定理 3.19)

各 i, $j = 1, \ldots, n$ に対して

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ik}, \qquad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\tilde{a}_{kj}$$

応用（行列式の計算）