線形代数学第一 (LAS.M102-10)

余因子展開

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/05/20 (2022/04/25 訂正)

余因子展開

$A = [a_{ij}]$: n 次正方行列.

- $A_{ij} = A$ の第 i 行，第 j 列を除いた行列　A の (i, j) 小行列
- $\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j}|A_{ij}|$: A の (i, j) 余因子

定理 (定理 3.19)

各 i, $j = 1, \ldots, n$ に対して

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ik}, \qquad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\tilde{a}_{kj}$$

系

$i \neq j$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{jk} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\tilde{a}_{kj} = 0$$

余因子行列

$A = [a_{ij}]$: n 次正方行列.

- $A_{ij} = A$ の第 i 行，第 j 列を除いた行列　A の (i,j) 小行列
- $\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j}|A_{ij}|$: A の (i,j) 余因子
- $\widetilde{A} := {}^t[\tilde{a}_{ij}]$: A の余因子行列

定理

各 i, $j = 1, \ldots, n$ に対して

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{jk} = \delta_{ij} \det A, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\tilde{a}_{kj} = \delta_{ij} \det A.$$

系

$$\widetilde{A}A = A\widetilde{A} = \det A E$$

応用：逆行列の公式

定理

A が正則であるための必要十分条件は $\det A \neq 0$ で

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}.$$

応用：Cramer の公式

定理

n 次正則行列 A に対して，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\det A} \det[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n], \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{\det A} \det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{b}] \end{aligned}$$

問題 9-1

問題

- 2 次正則行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$, 2 次列ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は
$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}\det[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2] \\ \det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}]\end{bmatrix}$$
であることを確かめなさい.
- 3 次正則行列の場合はどうか.

問題 9-2

問題

各成分が変数 t の微分可能な関数であるような n 次正方行列 $A(t)=[a_{ij}(t)]$ に対して $\frac{d}{dt}A(t)=A'(t):=[a'_{ij}(t)]$ と定める.

- $n=2$ のとき,

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)^{-1}\right)=-A(t)^{-1}\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)A(t)^{-1},$$
$$\frac{d}{dt}\det A(t)=\det A(t)\operatorname{tr}\left(A(t)^{-1}\frac{d}{dt}A(t)\right)$$

  であることを示しなさい.

- $n=3$ のとき，2 の場合と同じ公式が成立することを示しなさい.

問題 10-1

問題

n 次正方行列 A の階数が $n-1$ ならば，A の余因子行列の階数は 1 である.