線形代数学第一 (LAS.M102-10)

余因子展開

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/05/27

質問から

$\widetilde{A}$: Aの余因子行列

Q: 5/20 日黒板 C の系 $A\widetilde{A} = (\det A)E$ の部分は $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$ から証明されたものですか．他に証明のし方はありますか．

Q: 余因子展開の定理における系 $i \neq j$ のとき $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\tilde{a}_{kj} = 0$ の証明過程で行列の j 行目を i 行目で置き換えてしまうと，置き換えたあとの行列の各成分の一般性が保たれないのではないですか？

Q: 余因子展開の系（$i \neq j$ のとき $\sum_{k=1} a_{ik}\tilde{a}_{jk} = 0$）がどうして成り立つのかよく理解できませんでした．

A : n次正方行列 $\quad A = [a_{ij}] \quad A_{ij}$: (i,j)小行列

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} \qquad \hat{A} = {}^t[\tilde{a}_{ij}]$$

余因子行列

余因子展開公式

$(i, j = 1, \cdots, n)$

2n本

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\tilde{a}_{kj}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

A_{11} $\quad a_{11}\det A_{11}$

(-1) $\quad (-1)a_{21}\det A_{21}$ $\quad A_{21}$

$(-1)^2$ $\quad (-1)^3 a_{31}\det A_{31}$ $\quad A_{31}$

$i \neq j$ のとき

$$0 = \sum_k a_{ik} \tilde{a}_{jk}$$

j行で展開

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cancel{a_{j1}}\ a_{i1} & \cdots & \cancel{a_{jn}}\ a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum a_{ik} \hat{a}_{jk}$$

もとのAの余因子と変わらん

$\pm$ (j行目と一を除いた行列のdet)

同じ行がある：基本変形で0が作れる

ひとつの行が0 $\Rightarrow$ det = 0

$$\sum_k a_{ik}\tilde{a}_{jk} = \delta_{ij}\cdot\det A \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

$$A\tilde{A} = (\det A)E$$

$$\left(\tilde{A} = [b_{ij}],\quad b_{ij} = \tilde{a}_{ji}\right)$$

$$\sum_k a_{ki}\tilde{a}_{kj} = \delta_{ij}\det A$$

$$(\tilde{a}_{kj}\, a_{ki})$$

$$\tilde{A}A = (\det A)E$$

det A が 0 か 0 でないか（正則か正則でないか）とは無関係な式

$\boxed{\text{Rem}}$ ($n \geq 2$)

A が非正則 $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A < n$

$\Leftrightarrow \det A = 0$

このとき $\operatorname{rank} A = n-1 \Rightarrow \operatorname{rank}\tilde{A} = 1$

$\operatorname{rank} A \leq n-2 \Rightarrow \tilde{A} = 0$

$$A\tilde{A} = (\det A)E$$

$$\tilde{A}A = (\det A)E$$

よって $\det A \neq 0$ のとき $X = \dfrac{1}{\det A}\tilde{A}$ とおくと

$$AX = XA = E$$

$$\therefore X = A^{-1}$$

質問から

Q: 4 次以上の行列式を計算するときは，行基本変形によって次数を下げていく方法が一番楽にできるでしょうか．

Q: 4 次以上は余因子展開を使うのが一般的ですか．

Q: 余因子展開のメリットとして n 次正方行列を $n-1$ 次に変えることが挙げられますが，これより三角行列に変形した方がはやいようにおもえます．やはり余因子展開は逆行列に関するときのみを考えれば良いのでしょうか？

Q: 余因子展開は便利であるものの，次数が多くなってしまえば面倒くさい解法であると感じました．これの他に，余因子展開の解法としての弱点はあったりしますか？

余因子展開　定理

行列式の計算例

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = x^3+y^3+z^3-3xyz$$

$$= \begin{vmatrix} x+y+z & y & z \\ x+y+z & x & y \\ x+y+z & z & x \end{vmatrix} = (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 1 & x & y \\ 1 & z & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 0 & x-y & y-z \\ 0 & z-y & x-z \end{vmatrix} = (x+y+z)\times \begin{vmatrix} x-y & y-z \\ z-y & x-z \end{vmatrix}$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)$$

$$\times(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$=(x+y+z)\times\frac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)$$

(系) $x\geq 0\quad y\geq 0\quad z\geq 0$

$$\Rightarrow\quad x^3+y^3+z^3-3xyz\geq 0$$

相加相乗平均

$$(x^2+y^2-2xy=(x-y)^2$$

余因子展開の応用

問題 (問題 9-2)

各成分が変数 t の微分可能な関数であるような n 次正方行列 $A(t) = [a_{ij}(t)]$ に対して $\frac{d}{dt}A(t) = A'(t) := [a'_{ij}(t)]$ と定める.

- $n = 2$ のとき,

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)^{-1}\right) = -A(t)^{-1}\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)A(t)^{-1},$$
$$\frac{d}{dt}\det A(t) = \det A(t)\,\mathrm{tr}\left(A(t)^{-1}\frac{d}{dt}A(t)\right)$$

  であることを示しなさい.
- $n = 3$ のとき, 2 の場合と同じ公式が成立することを示しなさい.

$$\{A(t)B(t)\}' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, b_{kj}(t)$$

積の順番は変えれない

$$AA^{-1} = E$$

$$\frac{d}{dt}(AA^{-1}) = O$$

$$\frac{dA}{dt}A^{-1} + A\frac{d}{dt}A^{-1}$$

$$A\frac{d}{dt}A^{-1} = -\frac{dA}{dt}A^{-1}$$

$$\frac{d}{dt}A^{-1}$$

$$= -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}$$

$$A = [a_1, a_2 \cdots a_n]$$

$$\frac{d}{dt}\det A = \det[a_1', a_2, \cdots\cdots a_n] + \det[a_1, a_2' \cdots a_n] \cdots + \det[a_1, a_2, \cdots a_n']$$

[第1列]

$$= \sum_j a_{j1}' \hat{a}_{j1} + \sum_j a_{j2}' \hat{a}_{j2} + \cdots$$

$$= \sum_{i,j} a_{ji}' \hat{a}_{ji} = \mathrm{tr}\left(\hat{A}\frac{dA}{dt}\right)$$