

線形代数学第一 (LAS.M102-10)

余因子展開

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

`http:`

`//www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/`

東京工業大学

2022/05/27

質問から

- Q: 5/20 日黒板 C の系 $A\tilde{A} = \det A E$ の部分は $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$ から証明されたものですか. 他に証明のし方はありますか.
- Q: 余因子展開の定理における系 $i \neq j$ のとき $\sum_{k=1}^n a_{ki} \tilde{a}_{kj} = 0$ の証明過程で行列の j 行目を i 行目で置き換えてしまうと, 置き換えたあとの行列の各成分の一般性が保たれないのではないのですか?
- Q: 余因子展開の系 ($i \neq j$ のとき $\sum_{k=1}^n a_{ik} \tilde{a}_{jk} = 0$) がどうして成り立つのかよく理解できませんでした.

質問から

- Q: 4次以上の行列式を計算するときは、行基本変形によって次数を下げていく方法が一番楽にできるでしょうか。
- Q: 4次以上は余因子展開を使うのが一般的ですか。
- Q: 余因子展開のメリットとして n 次正方行列を $n-1$ 次に変えることが挙げられますが、これより三角行列に変形した方がはやいようにおもえます。やはり余因子展開は逆行列に関するときのみを考えれば良いのでしょうか？
- Q: 余因子展開は便利であるものの、次数が多くなってしまえば面倒くさい解法であると感じました。これの他に、余因子展開の解法としての弱点はあったりしますか？

行列式の計算例

余因子展開の応用

問題 (問題 9-2)

各成分が変数 t の微分可能な関数であるような n 次正方行列 $A(t) = [a_{ij}(t)]$ に対して $\frac{d}{dt}A(t) = A'(t) := [a'_{ij}(t)]$ と定める.

▶ $n = 2$ のとき,

$$\frac{d}{dt}(A(t)^{-1}) = -A(t)^{-1} \left(\frac{d}{dt}A(t) \right) A(t)^{-1},$$
$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \det A(t) \operatorname{tr} \left(A(t)^{-1} \frac{d}{dt}A(t) \right)$$

であることを示しなさい.

▶ $n = 3$ のとき, 2 の場合と同じ公式が成立することを示しなさい.