線形代数学第一 (LAS.M102-10)

余因子展開

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/05/27

問題 10-1

問題

n 次正方行列 A の階数が $n-1$ ならば，A の余因子行列の階数は 1 である．

$\leq n-2$

0

$A\tilde{A} = (\det A)E$ なので

regular 正則

A が非正則（特異 singular）

$\Leftrightarrow \det A = 0$

このとき $A\tilde{A} = O$ $A, \tilde{A}$：零因子

とくに $\tilde{A}$ は非正則．$\Rightarrow \operatorname{rank}\tilde{A} < n$

A: n次正方行列　　$\mathrm{rank}\,A = n-1$　r r

補題　A の列ベクトルから $(n-1)$ 個の一次独立なものをとることができる

$$A \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} = PA$$

P 正則行列

軸に相当する列ベクトルは

一次独立　∴ $\boxed{a_1 \; \cdots \; a_{n-1}}$

$\hat{A}A = O$　　$\hat{A}a_j = 0$　$(j = 1, \cdots, n-1)$

$\boxed{\mathrm{rank}\,\hat{A} = 1} \Longleftarrow$ $\hat{A}x = 0$ の解は $n-1$ 個の一次独立（をもつ）

- $\det A \neq \det B$ ゆえに $A \neq B$
- 対偶 $A = B \Rightarrow \det A = \det B$

問題 11-1 （図形）

問題

3 次の列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対して

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2. \quad \geqq 0$$

内積