2022 年 5 月 27 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 (LAS.M102-10) 講義資料 11

■お知らせ

- 中間試験の持ち込み用紙は T2SCHOLA 上のトピック「【中間試験】2022 年 6 月 2 日」の中にある「中間試験予告・フィードバック用」の課題においてあります．課題提出（オンライン・テキストで内容不問）を行うと，フィードバックに「持ち込み用紙」の pdf が出てくるはずです．課題の冒頭にある pdf（氏名欄が空白）をご利用いただいても構いません．

■試験関連のご質問など

質問 1： 中間テスト受けないとまずいですか？　**お答え：**講義資料 10, 1 ページ，下から 8 行目．

質問 2： 質問というよりは確認になってしまうのですが，持込用紙は自由に様々なことを書いておいて良いということでよいですか？ また，現在公開されている用紙の pdf は中間用になっていますが，期末では別の pdf が公開されますか？　**お答え：**はい．

質問 3： 持ち込み用紙は回収されるとのことでしたが，期末試験の際には期末試験用の持ち込み用紙はありますか．　**お答え：**はい．

質問 4： 計算余白が足りなくなったときや，裏面で計算をするために問題を写したいときなど，試験中に持ち込み用紙へ書き込みをするのは可ですか．　**お答え：**はい．

質問 5： 試験持ち込み用紙に，教科書をスキャンしたものを貼り付けて印刷してもよろしいですか？

お答え： どうぞ．

質問 6： A4 の持ち込み用紙 1 枚を試験場に持ち込んでよいということでしたが，持ち込み用紙に小さい紙を 1 枚貼って持ち込むのはアウトですか？　**お答え：**手の込んだことをしますね．明示的に禁止はしていませんが，口頭での説明で「用紙の表・裏・脇に書き込んでよい」ということを申し上げています．

質問 7： 中間試験と期末試験で問題用紙は回収されますか．　**お答え：**いいえ．

質問 8： 中間試験の持ち込みについて，持ち込み不可の例として狼煙をみるための双眼鏡が挙げられていますが，狼煙そのものの使用は咎められないのですか．

お答え： 法律や自治体の定めるところに従って下さい．

質問 9： 期末テストの問題を教えてください．　**お答え：**はい．6 月 10 日 10 時 55 分以降にお教えします．

■前回までの訂正

- 5 月 16 日のアナウンスメント（T2SCOLA；講義日程変更のお知らせ）：誤りのし的として ⇒ 誤りの指摘として
- 20220513 黒板 A・映写資料 A の 10 ページ：述語 ⇒ 術語
- 20220513 黒板 A・映写資料 A の 10 ページ：「えいあい」の和訳は「人工知能」ですね．失礼しました．
- 講義資料 9, 1 ページ，「授業に関するご意見」の 1 つ目：買ってに ⇒ 勝手に
- 講義資料 9, 4 ページ，質問 49 の「お答え」：述語 ⇒ 術語
- 講義資料 9, 4 ページ，質問 51：あらわれ る ⇒ あらわれる
- 講義資料 9, 4 ページ，質問 52 の「お答え」：問題でで ⇒ 問題で
- 20220520 映写資料 A：中間試験予告のページの 3 行目の句点が抜けていたそうです．
- 20220520 黒板 B，最後のスライド：行の番号と列の番号が逆です．訂正をいれたものをアップロードしておきます．

■授業に関する御意見

- 最近立志プロジェクトが答えの無い問題に悩まされてばかりなので，明確な答えのある数学が心のオアシスです．大学生のうちにたくさん頭を悩ませたいと思います．1Q はあとちょっとですがよろしくお願いします．
  山田のコメント： 答えがないのは問題が曖昧だからですね．それが悪いこととは言えませんが，答えを得るには問題の方をどんどん研ぎ澄ませていく必要があります．たぶん，それを立志でやっているんだと思いますが．
- 資料や黒板，授業録画を毎回配信してくださるのが非常に助かっています．大学生になって，先生が仰ったように「大学生が遊んでいるというのは迷信」というのを身をもって感じています．ところで先生はどうやってストレスを解消していますか？
  山田のコメント： とはいえ，せっかくの学生時代ですから遊んでほしいですね．ご出身が関東以外でしたら，東京にいるうちにいろいろと見てほしいものがあります（関東ご出身でも）．本学がキャンパスメンバーズに参加しているので，上野の国立博物館・国立科学博物館は常設展が無料で見れます（特別展は有料）．どちらもざっと見るのに 3 日くらいはかかると思います．山田のストレス解消は，劇場．
- 間違えのあるスライドに関して修正版を載せてくれるのは間違えの予防にもなるので助かります．
  山田のコメント： できるだけ．
- この授業の講義資料や映写資料は TeX で作っているのですか． **山田のコメント** はい．ちなみに $\TeX$ が正しい表記です．
- 今のところ線形代数の授業が一番わかりやすいと感じます．/ **わかりやすい**（山田注：特大文字）/ 今回の授業は分かりやすかったです． **山田のコメント** そう？ わかった気になっていると危険ですよ．
- どんどん分かるようになってきました． **山田のコメント** なるほど．
- テストを楽しみにしています． **山田のコメント** 山田もです．
- 中間テストと期末試験頑張ります． **山田のコメント** 山田も頑張ります．
- テストに向けて演習を頑張ります． **山田のコメント** 承りました．
- 学生としてはありがたいですが，カンペありのテストは珍しいと思いました．
  山田のコメント： やっている先生は結構多いですよ．
- 今までに行ってきた期末試験で起きた珍事などはありますか？
  山田のコメント： 教壇で「ここってよく見えるんですね」と口走ったら「びくっ」とした人がいた．
- 試験の情報をたくさん流してくださるのは本当に助かります． **山田のコメント** そう？
- 中間試験は素晴らしい制度だと思います． **山田のコメント** そうなの？
- 期末テストが近づいてきて危機感を覚えています． **山田のコメント** 山田もです．
- 試験がこわいです． **山田のコメント** こわくないよ．
- 授業ありがとうございました． **山田のコメント** どういたしまして．
- 余因子展開かっこいい． **山田のコメント** そうなんだ．
- 1 つの問題に対していくつかの解き方があるので，どれを使うかまよいます． **山田のコメント** 全部やってみればよい．
- 線形代数嫌いになりそうです． **山田のコメント** 残念です．
- バトルの結果をいつか教えてください． **山田のコメント** 極秘
- 理学院長をしていらっしゃったということですが，理学院長をして何か良かったことはありますか？ **山田のコメント** 給料．
- 山田先生は数年ぶりに学部 1 年の講義を担当したとおっしゃっていたと思いますが，講義を担当する学年はランダムに決められてしまうものなのでしょうか． **山田のコメント** 理学院数学系の教員は原則として理工系教養科目を担当することとなっています．しばらく管理職をやっていましたので，免除してもらっていました．
- もうすぐ 1Q が終わってしまい，少しさみしいです． **山田のコメント** 次のやつがどんどん来ます．
- 休講の時間は勉強しようと思ったのですが，結局できませんでした．自律って難しいですね． **山田のコメント** はい．
- 嫌いなタイプは何ですか（人間のタイプです）好きなタイプは何ですか． **山田のコメント** 人間はあまり好きではありません．
- いまのところ不満はないです． **山田のコメント** 了解．

■質問と回答

質問 1： 5/20 日黒板 C の系 $A\widetilde{A} = \det AE$ の部分は $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$ から証明されたものですか．他に証明のし方はありますか．

お答え： いいえ．順番に読んでください．逆行列の公式はご質問の系より後ではないですか？

質問 2： 余因子展開の定理における系 $i \neq j$ のとき $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\tilde{a}_{kj} = 0$ の証明過程で行列の j 行目を i 行目で置き換えてしまうと，置き換えたあとの行列の各成分の一般性が保たれないのではないですか？

お答え： 成分の一般性とはなんでしょうか．行を入れ替えてもここに現れる余因子は変わらない，ということを使っています．

質問 3： 余因子展開の系（$i \neq j$ のとき $\sum_{k=1} a_{ik}\tilde{a}_{jk} = 0$）がどうして成り立つのかよく理解できませんでした．

お答え： A の j 行目を i 行目で置き換えた行列を j 行について展開する．

質問 4： 定理 3.19 から導かれる系についての質問なのですが，この系の証明の際に用いられる「第 j 列で展開」（黒板のスライド 5 のところです）というのは第 j 列で余因子展開するということですか． **お答え：**はい．

質問 5： 余因子展開をするとき，どの列もしくは行に関して展開するかはどうやって決めていますか． **お答え：**楽そうなところ．

質問 6： 定義って勝手に決めていいんですか．たとえばネイピア数には複数の定義がありますが，どれか 1 つだけを定義したら残りは定理にしかならないと思います． **お答え：**そのとおり．一つの概念の定義のしかたが何通りもあることがあります．本・論文・講義などの一つの文脈ではそのうちのどれかを定義として採用し，他は定理とします．文脈によって何を定義としているかが異なることがありますので，気をつけなければいけません．もちろん「混ぜるな危険」．

質問 7： 行列を行列で微分するという演算は定義可能ですか？ **お答え：**なるほど面白いですね．関数の微分の定義（高等学校で習いますね）に必要なものは何でしょう．それに対応する道具は行列に揃っているでしょうか．

質問 8： 行列でも微分を考えることができるということは，積分もできますか？ このときは面積といった図形的意味は何かありますか？ **お答え：**各成分は関数ですから，その積分が考えられるのは当たり前ですね．少し話を逸します：「積分の図形的意味は面積」とよく標語的に言われますし，それはまあ正しいのですが，もう少し詳しく（より正確に）述べてごらんなさい．

質問 9： 行列でも積の微分法が使えるならば行列の部分積分もできますか？

お答え： はい．$\int_a^b A'(t)B(t)\,dt = A(b)B(b) - A(a)B(a) - \int_a^b A(t)B'(t)\,dt$．なお，積の順序は交換できない，.

質問 10： 置換の符号は転倒数が偶数なら $+$，奇数なら $-$ でした．このことを数式を用いて一般化できないでしょうか？ 日本語で定義するよりも数式で定義した方が格好いいと思ってしまいます．

お答え：「数式」として何を想定していますか？ たとえば $\boldsymbol{p} = (p_1\ p_2\ \dots\ p_n)$ に対して $\operatorname{sgn}\boldsymbol{p} = (-1)^{\#\{(i,j)\mid i,j\in\mathbb{Z}, 1\leqq i<j\leqq n, p_i>p_j\}}$ は数式で表したことになっていますか？ ちなみに $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合，$\#\{\dots\}$ は集合 $\{\dots\}$ の要素の個数 cardinal number.

質問 11： $(A\widetilde{A})_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\widetilde{A})_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\tilde{a}_{ij}$, $(\widetilde{A}A)_{jj} = \sum_{i=1}^n (\widetilde{A})_{ji}a_{ij}\ \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ij}a_{ij}$ となぜなるのか分かりません.

お答え： 行列の積の定義式.

質問 12： 5/20 黒板 B のスライドの最後から 2 枚目で $(-1)^{i+1}a_{11}\det A_{11}$ について $(-1)^{i-1}$ ではなく $(-1)^{i+1}$ にしますと仰っていたのはなぜですか． **お答え：**行の入れ替えが $(i-1)$ 回生じるので $(-1)^{i-1}$ 倍がでるが，それは $(-1)^{i+1}$ 倍することと同じことなので，余因子の定義式に合わせて $(i+1)$ と書いた.

質問 13： 余因子の展開公式のところで i 行を 1 行に持ってくる時になぜ一気に入れ替えたらだめなのかの説明がわかりませんでした.

お答え： 一気に入れ替えると残りの行の順番が入れ替わり，(i,j)-小行列にならない.

質問 14： 余因子行列 $\widetilde{A}$ を $\widetilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ ではなく $\widetilde{A} = {}^t[a_{ij}]$ のように定義した理由を説明していただきましたが理解できなかったのでもう一度説明して欲しいです． **お答え：**ご質問の最初の定義だと $A^{t}\widetilde{A} = (\det A)E$ となるが，転置をつけて定義すると $A\widetilde{A} = (\det A)E$ という「きれいな」式となる.

質問 15： 余因子行列に転置が含まれるのは逆行列を求めやすくするといった便宜上の理由からですか．それとも他に理由がありますか． **お答え：**$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (\det A)E$ としたかった.

質問 16： 結局のところ，逆行列や行列式を求めるには，余因子を使うより掃き出し法やサラスの定理を使う法が常に処理が速いのでしょうか．それとも余因子を使う方がよい場面は存在するのでしょうか． **お答え：**20220520 黒板 B，pdf ファイルの 6 ページ.

質問 17：「任意の行列式を行基本変形してから余因子展開して求められた数値」と「同じ行列式を行基本変形せずに余因子展開して求めた数値」が等しくなるのは行基本変形は方程式の同値関係であるからですか.

お答え： いいえ．行基本変形によって行列式がどう変わるかが明らかだからです.

質問 18： 4 次以上の行列式を計算するときは，行基本変形によって次数を下げていく方法が一番楽にできるでしょうか.

お答え： 一番かどうかは分かりません.

質問 19： 4 次以上は余因子展開を使うのが一般的ですか． **お答え：**4 次以上の何ですか？

質問 20： 余因子展開のメリットとして n 次正方行列を $n-1$ 次に変えることが挙げられますが，これより三角行列に変形した方がはやいようにおもえます．やはり余因子展開は逆行列に関するときのみを考えれば良いのでしょうか？

お答え：「はやい」のは何をするためにでしょうか．余因子展開によって行列式の計算量は変わりませんが，展開公式は行列式の「計算」のためにのみあるのではありません.

質問 21： 余因子展開は便利であるものの，次数が多くなってしまえば面倒くさい解法であると感じました．これの他に，余因子展開の解法としての弱点はあったりしますか？ **お答え：**余因子展開は「解法」なのですか？ 何をとく方法なんですか？

質問 22： 行列の掃き出し法でも行列式の交代性を意識して，行を入れ替えるときにマイナスをつけた方がいいですか.

お答え：「行列の掃き出し法」で何を行うことを想定していますか？ どこにマイナスをつけるのですか？

質問 23： 連立方程式（例として 4 元 1 次の連立方程式）の拡大係数行列 A が $A = {}^t[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4]$ ($\boldsymbol{a}_i$ ($i = 1,2,3,4$ は 5 次の列ベクトル) と表されるとき A に $A \mapsto {}^t[\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_1]$ のように変形することは，行基本変形と呼べますか？ **お答え：**(1) 3 つの行基本変形の組み合わせとして書けるでしょうか．やってみましょう．(2) 変形した後の行列を PA の形に書いたときに P は正則行列でしょうか.

質問 24： 行列式の交代性や行列のある行（列）の s 倍を他の行（列）に加えても行列式の値は変化しないなどの性質は行（列）のみの操作だけでなく一度に行と列の両方に対して操作しても成立するものなのでしょうか.

お答え： 具体的にどのような操作なのでしょうか．たとえば 3 次くらいで実例が挙げられますか？

質問 25： 掃き出しなどで基本変形をしていくときに行基本変形と列基本変形は混在してもいいのでしょうか． **お答え：**目的による.

質問 26： 3 次正方行列の行列式ではサラスの公式が使えますが，問題を解くスピードは余因子展開のときと大差ないと感じました．せっかく公式化されているので使った方がよいのでしょうか・ **お答え：**お好きなように．答えが出ればいいんです.

質問 27： 列基本変形やサラスの公式は授業で扱うのですか． **お答え：**前者：$\det {}^tA = \det A$ なので行列式を求めるときに「列基本変形」を使ってもよさそう，ということを口走った．後者：20220509 黒板 C の pdf ファイル 7 ページ（修正あり）

質問 28： 行列式の定義の中にある Σ の下に「$\sigma \in S_n$」と書いてある資料をネットで見ました．先生が「p」（山田注：太字？）と表現している所ですが，「p」という表現は誤りだったり説明不足になるのでしょうか.

お答え： だからその下に「ただし和は...」という説明があります．そこまでが定義式です．ネットで見た「$\sigma \in S_n$」という記述の意味はその前後で必ず説明してあるはず．そこまで含めて定義式です．そこまで読めば同じ物であることがわかるはず.

質問 29： 正方行列 A, B が $A \neq B$ を満たすことを証明したい場合に，$\det A \neq \det B$ を示せば $A \neq B$ を証明したことになりますか． **お答え：**はい．対偶.

質問 30： 山田先生は「A の行列式」を表すときは $|A|$ ではなく $\det A$ で表す方が好きなのですか.
お答え： はい．絶対値と読む人が必ず出てくるので，くどいようですが det と明示するようにしています.
質問 31： 以前の授業で $\tilde{a}$ と文字置きしたことがあったと思いますが，第 (i, j) 余因子を $\tilde{a}_{ij}$ と表すのは一般的なものなのでしょうか.
お答え： いいえ.
質問 32： 前の授業で $P_i(s)$ などの表記は見間違えやすくよくないとおっしゃっていましたが，小行列の A_{ij} という表記には見間違えに気をつけるべきものはありますか． **お答え：**ちょっと嫌な記号で，本によっては余因子（小行列式）を A_{ij} と書いたりしています．いずれにせよ，定義に立ち戻る必要がありますね.
質問 33： 命題・補題・系はすべて定理の中でのニュアンスの問題という話がありました．一方で，高校のときに命題は「真偽が定まる主張」と定義された（“条件” に対応するものとして）のですが，どうなっているのですか.（定理も命題にならないのですか？）
お答え：「命題」という語の二通りの用法です．数学の論文や書物の文脈では講義で説明されるような使い方をすることが多いです．一方，論理そのものを扱う場合にご質問のような意味で使います.
質問 34： 定理，命題，補題，系は広義では定理に含まれるとおっしゃっていましたが，なぜ細かく分類しているのでしょうか？ またそれらの違いは何なのでしょうか？
お答え： 前者：その文脈（論文や本）でどこに強調点があるか，その広義定理がどのように使われるかを明確にする，すなわち読みやすくするため．後半：それを説明したはず.
質問 35： Tilde をネットで調べてみたところスペイン語でした．数学用語をアルファベット表記したときに何語が多いのでしょうか.
お答え： 英語の辞書にもあります（First use が 19 世紀らしい）ので，英語とも言える．カステラは日本語ですよね.
質問 36： 20220520 黒板 C，7/9 ページの $\det A(t)$ の微分の式の中で $A(t)$ のインバースの前に括弧がついていませんでした．これは括弧をつけない表記でも問題ないということですか？ それともミスですか？
お答え： $A(t)^{-1}$ を行列値 $A(t)$ の逆行列と見る以外に解釈のしようがないのではないでしょうか．$t \mapsto A(t)$ の逆写像であればそもそも “-1” をつける場所が違いますね．他の可能性がなさそうなので，山田は括弧をつけたりつけなかったりします.
質問 37： 今回の授業で行列式の微分について触れましたが，行列の微分は定義されるのでしょうか？ **お答え：**そこで定義しています.
質問 38： ${}^t[a_{ij}]$ と $[{}^t a_{ij}]$ は同じものですか． **お答え：**後者はあまり意味がないと思います．どこかにあったとしたら誤り（に近い）．スカラ a_{ij} を 1×1-行列と思い，転置して並べたもの，という解釈も可能でしょうが，それは $[a_{ij}]$ と同じものですね.
質問 39： 掃き出し法の問題に答えるときに，一言 “掃き出し法により” とか書いて最終形のみを書いていいのか，それとも途中の操作は何を行ったかを書く教科書のような書き方をすべきか，どっちかが気になりました．また，途中の操作を書く場合は答案には教科書と同様に書くのか，他に良い書き方があれば知りたいです． **お答え：**答えがあっていれば何でも良い.
質問 40： 第 3 章の章末問題は大問何番の内容まで進みますか？ **お答え：**現時点でもっている道具で全部解けるはず．楽しいよ.
質問 41： クラメルはどういう人なのですか． **お答え：**Wikipedia に記述がありますね．Gabriel Cramer, 1704–1752.
質問 42： Perl はどうやって学習しましたか？ 普段遣いのエディタは何ですか？ **お答え：**いくつかの本と web の情報．Emacs.
質問 43： 行列式は n 次行列のときも定義できるのでしょうか． **お答え：**定義したでしょ.
質問 44： なぜ $\det({}^t A) = \det A$ が成り立つのですか？ **お答え：**テキスト 定理 3.12, 20220513 黒板 B, pdf の 8 ページ目.
質問 45： 余因子の式 $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ について (-1) の次数が $i + j$ と定めるのは第 i 行と第 j 列を除く $\Rightarrow$ 他の行と列を i, j だけずらす $\Rightarrow$ 転倒数が i, j ずつ大きくなるという認識で問題ないですか． **お答え：**認識という（数学的には）曖昧な語でごまかされるとなんとも言えませんが，「どの状況で何をどのようにずらすのでしょうか」.
質問 46： 行列式の存在意義を教えてください． **お答え：**いくつか説明しましたが，あなたにとっては意義がないことですか？
質問 47： 余因子という考え方が数学にもたらす利点は何ですか． **お答え：**クラメルの公式は利点ではないですか？
質問 48： これらの定理は誰が発見したんですか？ **お答え：**どの定理ですか？
質問 49： 正則行列がゼロ因子にならないことは試験で証明しないで使って良いんですか？
お答え： 講義資料 6（5 月 2 日）お知らせの 2 つ目.

11 余因子展開

- 応用：クラメルの公式（定理 3.21），逆行列の表示（定理 3.20）
- 応用：行列式の微分公式

問題

11-1 3 次の列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対して

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2.$$

2022 年 5 月 27 日