2022 年 6 月 2 日 10 時 55 分 ～12 時 25 分
corr(2022 年 6 月 2 日, Ver 1)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 中間試験 〔問題 1〕

注意事項
- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解できるように書いてください.
- 計算や下書きには余白や裏面を使用してください（採点の対象とはしません）.
- 試験終了後，**解答用紙**と**持ち込み用紙**を回収します．問題は持ち帰って下さい．
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません．問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は T2SCHOLA (トピック【中間試験】2022 年 6 月 2 日）へのフィードバックとして返却いたします.
- 採点に関する質問・クレイムなどは **2022 年 6 月 6 日**までに山田まで**電子メイル**にてお申し出ください.
- 期末試験（2022 年 6 月 10 日実施予定）の持込用紙を T2SCHOLA で配布しています.

指定用紙のみ持込可

問題 A [40 点] 次の $\boxed{1}$～$\boxed{7}$ に最もよく充てはまる数・式を入れ，下線 **a** について後の問いに答えなさい.

未知数 x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} x_1 & +3x_2 & -2x_3 & -5x_4 & =a \\ -x_1 & -3x_2 & +\ x_3 & +3x_4 & =3 \\ x_1 & +3x_2 & & -\ x_4 & =a \end{cases}$$

を，行列を用いて $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と表す．ただし $\boldsymbol{x}:={}^t[x_1,x_2,x_3,x_4]$ は未知数からなる列ベクトル，a は定数である．この方程式の係数行列 A の型は $\boxed{1}$，A の $(2,1)$-成分は $\boxed{2}$ である.

係数行列 A の階数は $\boxed{3}$ なので，同次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は，$\boldsymbol{x}=\boxed{4}$ と $_{\mathbf{a}}$<u>一次独立な列ベクトルの一次結合</u>の形で表される.

方程式 $(*)$ が解をもつための条件は $a=\boxed{5}$ となることで，このとき $(*)$ の解は $\boldsymbol{x}=\boxed{6}$ のように任意定数を $\boxed{7}$ 個含んだ形で表される.

問題 a $\boxed{4}$ に現れるベクトルたちが一次独立であることを証明しなさい.

問題 B [20 点] 次の行列に対して，以下の (1) ～ (4) の値を求めなさい.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},\qquad B=[-5],\qquad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) A^3　　(2) $(E-A)^{-1}$
(3) $\det B$　　(4) $\det C$

問題 C [20 点] 次は正しいか．正しければ解答欄の [ ] 内に○を記し，証明を与えなさい．また，正しくなければ [ ] 内に×を記し，反例を挙げなさい．ただし E は単位行列，O は零行列を表す.

(1) A が正則行列であるとき，$\det(A^{-1})=(\det A)^{-1}$.
(2) 正方行列 A，B に対して $(A-B)(A-2B)=A^2-3AB+2B^2$.
(3) 正方行列 A に対して $(A-E)(A-2E)=A^2-3A+2E$.
(4) 正方行列 A が $A^2-3A+2E=O$ を満たすならば $A=E$ または $A=2E$.

問題 D [0 点] この科目の講義，教材，試験などに関する意見，希望，誹謗，中傷などをお書きください.

おつかれさまでした ♡

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 中間試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄

1 $(3,4)$ 型

2 -1

3 2

4 $t_1\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$

問題 a $t_1\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ とすると，

この等式の第 2 成分から $t_1=0$，第 4 成分から $t_2=0$ となる．

5 -3

6 $\begin{bmatrix}-3\\0\\0\\0\end{bmatrix}+t_1\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$

7 2

学籍番号			B						氏名	

2022 年 6 月 2 日 10 時 55 分 ～12 時 25 分
corr(2022 年 6 月 2 日, Ver 1)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 中間試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄

(1)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2)
$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ -4 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) -5

(4) 160

学籍番号			B						氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 中間試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄

(1) [◯] $E = AA^{-1}$ なので $1 = \det E = \det(AA^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1})$．とくに $\det A \neq 0$ なので $\det A^{-1} = 1/(\det A)$.

(2) [×]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ とおくと，

$$(A-B)(A-2B) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ A^2 - 3AB + 2B^2 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(3) [◯] (A と E は可換なので実数や複素数数の積と同じ性質が成り立つ．)
$(A-E)(A-2E) = A(A-2E) - E(A-2E) = A^2 - 2AE - EA + 2E^2 = A^2 - 2A - A + 2E = A^2 - 3A + 2E$

(4) [×]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$ とおくと，$A^2 - 3A + 2E = O$.

問題 D の解答欄

学籍番号			B					氏名	