線形代数学第一 (LAS.M102-10)

補足

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/linear-1/

東京工業大学

2022/06/03

題意

・…は示された 結論

・…のベクトルは一次独立

問題にあたえられた

・題意より…… 仮定

広辞苑： 題の意味するところ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{Bmatrix}$$

- $A^3 = O$ $\quad (E+A)^3 = O$
- $\underline{(E-A)^{-1}} = E + A + A^2$

中間試験問題 B

- $\det B \ (B = [-5])$ -5

- $\det C \quad \left(C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \cancel{2}0 & 3 & 4 & 1 \\ \cancel{3} & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right)$ 160

(余因子公式)

- A が正則行列であるとき，$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{l} AA^{-1} = E \Rightarrow (\det A)(\det A^{-1}) = 1 \\ \;\; \| \\ A^{-1}A \end{array} \right)$$

行

- A が直交行列　${}^tAA = A{}^tA = E$

$\Rightarrow \det A = \pm 1$　　$\det {}^tA = \det A$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

中間試験問題 C

- 正方行列 A, B に対して $(A-B)(A-2B) = A^2 - 3AB + 2B^2$
- 正方行列 A に対して $(A-E)(A-2E) = A^2 - 3A + 2E$.
- 正方行列 A が $A^2 - 3A + 2E = O$ を満たすならば $A = E$ または $A = 2E$.

(AB≠BA なら ひとしくない)

特に AB≠BA となる AとBの組はあるか? (具体例)

(反例) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

「AB≠BA となる A, B があるから」

非自明な零因子があるから ($BC = O$ かつ $B \neq O$ $C \neq O$)

✓ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 1^2 - 3\cdot 1 + 2 & 0 \\ 0 & 2^2 - 3\cdot 2 + 2 \end{bmatrix}$$

Good Luck!