2022 年 6 月 10 日 10 時 55 分 ∼12 時 25 分 (2022 年 6 月 12 日, Ver 2)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 期末試験 〔問題 1〕

注意事項
- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解できるように書いてください.
- 計算や下書きには余白や裏面を使用してください（採点の対象とはしません）.
- 試験終了後，**解答用紙**と**持ち込み用紙**を回収します．問題は持ち帰って下さい.
- 答案は T2SCHOLA で返却いたします.
- 採点・成績に関する質問・クレイムなどは **2022 年 6 月 17 日**までに山田まで**電子メール**にてお申し出ください.

指定用紙のみ持込可

問題 A [40 点] 次の $\boxed{1}$～$\boxed{6}$ に最もよく充てはまる数・式を入れ，後の**問題 a1**, **a2** に答えなさい：
未知数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 に関する連立一次方程式

$$(*)\qquad \left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -2x_2 & & & +\ x_5 & =a \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +4x_5 & =b \\ -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +2x_5 & =c \\ & & +3x_3 & +2x_4 & +3x_5 & =1 \\ 2x_1 & -4x_2 & & & +2x_5 & =2 \end{array}\right.$$

を，行列を用いて $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と表す．ただし $\boldsymbol{x}:={}^t[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$ は未知数からなる列ベクトル，a, b c は定数．この方程式の係数行列 A の $(4,2)$-成分は $\boxed{1}$ である．行列 A の階数は $\boxed{2}$ なので，同次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は，$\boldsymbol{x}=\boxed{3}$ と${}_{\mathbf{a}}$一次独立な列ベクトルの一次結合の形で表される．方程式 $(*)$ が解をもつための条件は $(a,b,c)=\boxed{4}$ となることで，このとき $(*)$ の解は $\boldsymbol{x}=\boxed{5}$ のように任意定数を $\boxed{6}$ 個含んだ形で表される．

問題 a1 r 個の n 次列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ が一次独立であることの定義を述べなさい．

問題 a2 $\boxed{3}$ に現れるベクトルたちが一次独立であることを証明しなさい．

問題 B [20 点] 以下の (1) ∼ (4) の値を求めなさい．ただし

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) $\det A$.
(2) A の対角成分の総和.
(3) $\det[-\pi]$.
(4) 4 次正方行列 B の行列式が 2 であるとき，B の余因子行列 $\widetilde{B}$ の行列式.

問題 C [20 点] 次は正しいか．正しければ解答欄の [ ] 内に○を記し，証明を与えなさい．また，正しくなければ [ ] 内に×を記し，反例を挙げなさい．ただし E は単位行列，O は零行列を表す．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ が同次連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解ならば，それらの一次結合も同じ方程式の解.
(2) n 次正方行列 A が $A^2-6A+9E=O$ を満たすならば $A=3E$.
(3) 正方行列 A に対して $\det(-A)=-\det(A)$.
(4) n 次正方行列 A と n 次正則行列 P に対して $\det(P^{-1}AP)=\det(A)$.

問題 D [0 点] 言い残すことがありましたらお書き下さい.

おつかれさまでした ♡

線形代数学第一 期末試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄

1 0

2 2

3
$$t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

問題 a1

$t_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + t_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ を満たすスカラ $t_1, \dots, t_r$ は $t_1 = t_2 = \dots = t_r = 0$ のみとなること.

問題 a2

$$t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とすると，この等式の第 2 成分から $t_1 = 0$，第 4 成分から $t_2 = 0$，第 5 成分から $t_3 = 0$ となる.

4 $(1, 2, 0)$

5
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6 3

学籍番号			B						氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 期末試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄

(1)	(2)	(3)	(4)
-8	3	$-\pi$	8

学籍番号			B						氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 期末試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄

(1) [○] $A\boldsymbol{a}_1 = \mathbf{0}$, $A\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}$ だから，スカラ t_1, t_2 に対して

$A(t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2) = t_1 A\boldsymbol{a}_1 + t_2 A\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}$.

(2) [×]

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ とおけば $A^2 - 6A + 9E = O$.

(3) [×]

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とすると $\det A = 1$.

一方，$\det(-A) = \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1 = \det A \neq -\det A$.

(4) [○]

$$\begin{aligned} \det(P^{-1}AP) &= (\det P^{-1})(\det A)(\det P) = (\det P^{-1})(\det P)(\det A) \\ &= \det(P^{-1}P) \det A = (\det E)(\det A) = \det A \end{aligned}$$

問題 D の解答欄

学籍番号			B						氏名	