

# 位相空間論第一（講義）(MTH.B201)

集合

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

`http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-1`

東京工業大学理学院数学系

2024/04/09

# 集合の記述

$$X = \{x; p(x)\}$$

$p(x)$ : 条件 ✓

$x$  は 2 の倍数である

$(x \in \mathbb{Z})$

•  $d \in \{x; x \text{ は } 2 \text{ の倍数}\} = 2 \text{ の倍数全体の集合}$

⇔ 同値

$d$  は 2 の倍数

$$d \in \mathbb{Z}$$

“ $x$  は素数である”

# 例：区間

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$(a, b) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ and } a < x < b\} = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$$

$$(a, \infty) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ and } a < x\}$$

$$[a, b] =$$



$$a \leq x \leq b$$

$$(a, b] =$$

$\vdots$   
 $|$

$$\cdot (2, 1) = \emptyset$$

空集合

$$\cdot (1, 1) = \emptyset$$

# 部分集合

subset

ホウカン  
包含関係  
C

## 定義

定義

ナラバ

$$\triangleright A \subset B \stackrel{\text{def}}{\iff} "x \in A \implies x \in B"$$

$$\triangleright A = B \stackrel{\text{def}}{\iff} "A \subset B \text{ and } B \subset A"$$

空集合  $\emptyset$  ( $\emptyset$ )

$$P \implies Q \quad ( \iff \underline{(\text{not } P)} \text{ or } \underline{Q} )$$

## 命題

任意の集合  $A$  に対して  $\underline{\emptyset \subset A}$ .

not  $x \in \emptyset$  という条件は つねに偽真

冪集合

中集合

power set.

$$\mathcal{P}(X) (= 2^X) := \{X \text{ の部分集合}\}$$

補題

$X$  が  $n$  個の要素からなる

$X = \{a_1, \dots, a_n\}$  のとき  $\mathcal{P}(X)$  は  $2^n$  個の要素からなる。

$$X = \{1, 2, 3\}$$

$$\begin{aligned} \{1\} &\in \mathcal{P}(X) \\ \{2, 3\} &\in \mathcal{P}(X) \end{aligned}$$

$$2^n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \emptyset \\ \{1\}, \{2\}, \{3\} \\ \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\} \\ \{1, 2, 3\} \end{array} \right\}$$

集合の集合

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{Z} \in 2^{\mathbb{R}}$$

# 集合の演算

## 定義

▶  $A \cap B := \{x; x \in A \text{ and } x \in B\}$

共通部分  
intersection

Venn 図

▶  $A \cup B := \{x; x \in A \text{ or } x \in B\}$

和集合  
union

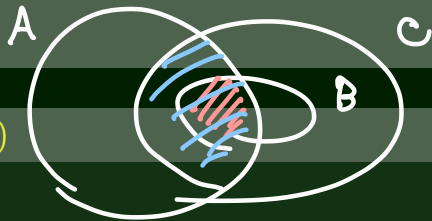
▶  $A \setminus B = \{x; \underline{x \in A} \text{ and } \underline{x \notin B}\}$

差集合  
difference

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

無理数全体の集合  
irrational numbers

# 集合の演算



補題 (補題 1.8)

$B \subset C$  のとき

$$\underbrace{A \cap B}_{\text{②}} \subset \underbrace{A \cap C}_{\text{①}}$$

$$A \cup B \subset A \cup C.$$

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ and } \underline{x \in B}$$

$$\Rightarrow \underbrace{x \in A}_{B \subset C} \text{ and } \underline{x \in C}$$

$$\Rightarrow x \in A \cap C \quad \square$$

# 集合の演算

## 命題 (命題 1.9)

- ▶  $B = A \cap B \iff B \subset A$
- ▶  $A \cup B = B \iff A \subset B$

同値



# 集合の演算

## 命題

集合  $A, B, C$  に対して次が成り立つ：

- ▶  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$
- ▶  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$

## 命題 (命題 1.10)

$$A \cup \left( \bigcap_{i=1}^n B_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \cup B_i), \quad A \cap \left( \bigcup_{i=1}^n B_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i).$$

本日の課題の提出締切は

2024年04月11日（木曜日）07:00 JST