2024 年 04 月 16 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

位相空間論第一（講義）(MTH.B201) 講義資料 2

お知らせ

- 30 名の方から課題提出がありました．T2SCHOLA にて返却しておりますのでご確認ください．なお，用紙に記入されているコメントは山田用のメモです．読めない字があるかもしれませんが，この資料に回答やコメントがありますのでそちらを参照してください．

前回までの訂正

- 映写資料 A：訂正の日付が過去の日付になっている．
- 映写資料 A, 黒板 A 8 ページ，3 つ目の項目：(誤) 2 ページ (正) 1 ページ
- 映写資料 A, 黒板 A 8 ページ，3 つ目の項目：(誤) A4 (正) A5
- 映写資料 C, 黒板 C 5 ページ，補題：(誤) $X = a_1, \dots, a_n$ のとき (正) X が n 個の要素からなる集合のとき

授業に関する御意見

- 僕は先生のアイコン好きですよ．　**山田のコメント：** Thanks
- 提出日がうまく反映されないため，tex の修正をしていただけるとありがたいです．本 pdf の提出日は 2024/4/11 です．
  山田のコメント： ソースがありますのでご自身で hack していただけないでしょうか．
- 理解しようとしている間にスライドが進んでしまうことがあると思うので，とくに重要な事項は黒板に書くようにしてほしい．
  山田のコメント： 黒板を利用することもできますが，スライドと併用するのはかなり（精神的な）手間がかかるので，どちらか一方としたいです．書き込んだものを公開できるのでいまはスライドを採用しています．固定カメラでは全体が撮影は困難，事後の公開不可ということをお認め頂いたうえで多くの方が黒板を支持されるのであれば黒板にします．
- 他に集合・位相の教科書を既に持っていたのですが，「これからの集合と位相」を改めて買うべきでしょうか．
  山田のコメント： 講義中に参照する場合があります．第 1 回でも命題番号を参照しましたね．そのときに困らないのであれば買わなくてもよいと思います．
- 演習の板書解答 $\boxed{8}$ (2), $\boxed{9}$ はおそらく間違いです．中村先生は学生同志で気づき合うことを期待されていらっしゃいますが，現段階では難しいことだと思います．河合先生（原文ママ：河井先生のことか）は解答を配ってしまったようです．臨機応変に対応していただけると，助かります．
  山田のコメント： なぜ「難しい」のでしょうか．あなたは「おそらく間違い」ということに気づいたのだから，授業中に発言すればよいのではないでしょうか．「おそらく」の部分が気になるのであれば，むしろ議論の俎上に上げるべき．数学の演習やセミナーはそのような形で進めるのが伝統的かつ標準だと思います．そのために長い時間を確保しています．
- 理学院のものではないのですが，ようやくやりたかった数学が学べるので楽しみにしています．　**山田のコメント：** よろしく
- 正直ついていけるか不安ですが，どうにか頑張ります．1 年間よろしくお願いいたします．
  山田のコメント： こちらこそ．山田の担当は前期のみです．
- 休憩がちょこちょこ入って，その間にフレンドリーに話してくれるのはありがたいと感じた。時々入る授業からは少しそれた雑談は面白いので今後もやってほしいです．　**山田のコメント：** ありがとうございます．心に余裕があるようでしたらやります．
- 授業の途中に休憩がある方が個人的にはうれしいので今回のようなスタイルで今後の授業も行っていただけたらとてもありがたいです．　**山田のコメント：** なるべく．
- 集合の多くの概念を分かりやすく伝えられ，内容の理解の助けになりました．　**山田のコメント：** よかった．
- 映写資料や黒板資料が分かりやすく、講義も聞きやすく面白かったので絶対に出席しようと思いました．
- 頑張りたい．　**山田のコメント：** 了解．
- 分かりやすかったです．　**山田のコメント：** Thanks.
- 板書を T2SCHOLA で見れるのがとてもありがたいです．　**山田のコメント：** ちょっと狭いのが残念ですね．
- 不満ないです．　**山田のコメント：** はい．
- 今回は特にありません．　**山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問 1： 授業内で $\{a,a,b,b,b\}$ のように集合の要素として同じ要素を複数書いてもいいということがありましたが，この表記方法を許可することによる利点を教えて欲しいです．利点がなければこの表記方法を禁止しても特に不都合なことはなく，むしろはっきり見やすくなると考えられるので何かしらの利点があると考えています．

お答え： たとえば $\mathrm{SO}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$ を考え，$\rho\colon \mathbb{R} \ni t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2)$ と定義します．SO(2) の定義式は一つの要素を無限回数えているので，たとえば $t \in [0, 2\pi)$ に限ってもよさそうですが，そうすると ρ の表記が面倒になります．

質問 2：「$X = \{a_1, \dots, a_n\}$ のとき $\mathcal{P}(X)$ は 2^n 個の要素からなる」という問題は，“a_1, ..., a_n は相異なる” という条件を付け加えるべきだと思います．例えば $a_1 = \cdots = a_n$ のとき（以下略）

お答え： おっしゃるとおりですね．「X が n 個の元からなる集合のとき $\mathcal{P}(X)$ は 2^n 個の元をもつ」というべきですね．

質問 3： 冪集合の性質，2^n 個の要素をもつことは集合の要素が何であっても 2^n 個ですか．例外はまったくないですか？

お答え： n 個の要素からなる集合の冪集合の要素の個数は 2^n．証明できるのでは？

質問 4： 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ について，0 を元に含めることで生じるメリットはなにかありますか．

お答え： たとえば数列の index を $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ と書くことにはメリットがあるのでは？

質問 5： 昨年度の線形代数の講義でベクトル空間の部分集合がベクトル空間になっているとき，その部分集合を部分空間というと学びました．今回の講義で，空間とは集合に構造を与えたものだとおっしゃっていたのを聞いて，部分空間とはベクトル空間に限らず，空間の部分集合で構造を保ったものを指しているのではと思ったのですが，一般にこう言えるのでしょうか．

お答え： 個々に定義をしますが，そのような形となるように定義するのが普通です．

質問 6： ベクトル空間以外も含めた「空間」の持つ「構造」の条件について気になりました．また，その「構造」によって「空間」を有限の種類に分類することができるのか疑問に思いました．

お答え： 構造を考えるのは人ですから，いくらでも作れます．たとえば距離空間，位相空間，測度空間は数学を学ぶ人なら皆知っている空間ですね．分野ごとにさまざまな空間を考えます．

質問 7： 包含関係の証明は「任意の数をある集合から選んでそれが他方の集合に属していることを示す」という手順が基本でしたが，それ以外のどんな証明方法でも論理さえ合っていれば問題ないのでしょうか．

お答え： 具体例をいくつか挙げてください．論理が合っているかどうか判定してみましょう．

質問 8： $B \subset C$ のとき $A \cap B \subset A \cap C$ であることの証明を講義で扱った．講義ではまずはじめに $x \in A \cap B$ としていたが $A \cap B$ が元をもたない，つまり $A \cap B = \varnothing$ の場合もあるのではないか，その場合は $A \cap B \subset A \cap C$ は自明である．このように集合に関する命題を扱うとき，空集合の場合について言及しておく必要はあるのか．

お答え： 講義で紹介した証明は空集合の場合も含んでいます．示したことは「$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \cap C$」ですね．「$\Rightarrow$」の定義から「]$x \in A \cap B$」が真である場合に「$x \in A \cap C$」が真であることを示せばよい，それを実行しています．

質問 9： $\varnothing \subset A$ (A は任意の集合が成り立つことを示したかったが，$\varnothing$ は元を持たないのでどう証明すればよいかわからなかった． **お答え：** 任意の x に対して $x \in \varnothing$ は成立しないので，not $x \in \varnothing$ は常に真．したがって $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$ は常に真．

質問 10： $\{$空集合が存在しない集合$\}$ は空集合なのでしょうか。 **お答え：**「空集合が存在する」とはどういうこと?

質問 11： $\varnothing$ と $\{\varnothing\}$ の違いがイメージしずらい．

お答え： イメージする必要はありません．$\varnothing$ は要素をもたない．$\{\varnothing\}$ は “$\varnothing$” という一つの要素を持っている．

質問 12： $\varnothing$ と $\{\varnothing\}$ の違いがイマイチしっくりこない．$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ を考えた際に思ったことである．$\{\varnothing\}$ は「空集合を要素にもつ集合」という意味になるが，これはつまり $\varnothing$ と同じになってしまうのではないかと思ってします．

お答え：「イマイチ」とは「いまひとつ」という意味なので，目標に対してどれくらい近づいて，どれくらい足りないのかを明確にしてほしい．「空集合を要素に持つ集合」は要素をもっているが「空集合」は要素を持っていませんね．

質問 13： $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$ を外延的記法で露わｓうとき $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ になるのですが，$\{\varnothing\}$ は空集合 $\varnothing$ という集合を要素として持つ集合で，空集合ではないのですが，$\{\varnothing\}$ $\{\{\varnothing\}\}$ の詳しい違いは何んですか？

お答え： $\varnothing \in \{\varnothing\}$, $\{\varnothing\} \notin \{\varnothing\}$, $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$, $\varnothing \notin \{\{\varnothing\}\}$.

質問 14： $p(p(\emptyset))$ を考える問題が教科書にあった（原文ママ：p は $\mathcal{P}$ のことか？）が，それを外延的集合（原文ママ：外延的表記のことか？）で表せば $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ のようになった．集合を考える上では上野ような集

合を考えることはできるが，集合に何回入っているか（簡単に言えば $\{\}$ の数）が異なるものを同じ集合に入れて考えることにどのような意味があるのだろうか？ 数学的議論ができることは理解できるものの，数学から離れたときに先の集合にはどのような意味付けの例があるのか思いつかたかった．

お答え： もし興味があるなら「自然数の集合の構成」を調べてご覧なさい．

質問 15： 演習の方で $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$ を外延的記法によって記す必要のある出題があった．これは $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ となるが，その中の $\{\varnothing\}$ はいわば「空集合の集合」となる訳だが，意味するところは一体何なのか．感覚的に考えれば，元が何もない集合の部分集合はどう考えても元のない集合，すなわち空集合に限られるように思えるから，これも結局空集合と同じなのか．

お答え： 感覚的に考えてはいけません．「意味らしきもの」を考えるとわからなくなると思います．$\varnothing$ という要素 1 つだけからなる集合が $\{\varnothing\}$.

質問 16： 本日は集合の要素の取り扱い方や，集合を要素にもつ集合（特に冪集合）について学びましたが，１つの集合に属する要素は互いの種類（性質）が違っても良いのでしょうか？ 演習問題に $A = \{0, 1, \{0, 1\}\}$ という集合が登場していて疑問に思いました．（この場合，0, 1 という数字と $\{0, 1\}$ という集合という種類の異なる要素を持っている）

お答え： 違っていてもよいです．

質問 17： 空集合のべき集合が $\{\varnothing\}$ となることについて，授業内できちんと証明できなかったのですが，それについて空集合は空集合のみを部分集合に持つ事の証明を考えました（以下略）

お答え： はい．空集合が空集合の部分集合であること，空集合でない集合は空集合の部分集合でないことの 2 つを示すということですね．

質問 18： 今回の講義の解説では $\{\varnothing\}$ に属する要素の数が 1 つのみといった観点から、$\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\{\varnothing\}, \varnothing\}$ であるという解説を受けましたが，これは例えば $\mathcal{P}(\{A\})$ という集合に関しても $\{A\} = \{A, \varnothing\}$ ということから $\mathcal{P}(\{A\}) = \mathcal{P}(\{A, \varnothing\}) = \{\{A\}, \{A, \varnothing\}, \{\varnothing\}, \varnothing\}$ となってしまい，元の答えである $\{\{A\}, \varnothing\}$ とは異なってしまうのでは無いかと思います。ここのどこの論理が間違えているのか講義で教えてくださると幸いです．

お答え： $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, A\}$ が間違っています．たとえば $\mathcal{P}(\{0, 1\})$ は何でしょう．

質問 19：「$P \Rightarrow Q$」と「(not P or Q)」は厳密にまったく同理ですか？ **お答え：**前者の定義が後者.

質問 20：「$p \Rightarrow q$」を「$\neg p$またはq」と捉える理由は p の真偽にかかわらず「$p \Rightarrow q$」の命題の真偽を与えることができるからと考えてよいのでしょうか？

お答え： どんな p を含む論理式も「p の真偽に関わらず」ですよね．定義と思うのが自然だと思います.

質問 21： $p \Rightarrow Q$ で p が偽であると k に Q はどうでもいい (Q の真偽に関係なく真になる) ということはどう考えればよいのか.（山田注：手書きですが p が大文字に見えませんでした） **お答え：**定義です.

質問 22： 授業内で「p ならば q」と「p でないまたは q は同値というのを約束するとありましたが，真理表を書くと（原文ママ：書いてのこと？）確かめるのでなく約束するということにしたのは理由がありますか.（この部分を受け，真理表をつかったかくにが不十分なのかと考え質問させていただきました）

お答え： not$p$or$q$ の真理表を書くのは（not と or が定義されていれば）簡単ですが，$p \Rightarrow q$ の真理表を書くには $\Rightarrow$ の定義が必要です.

質問 23： 集合を定義せずに集合論を講議（原文ママ：講義のことか）で扱っていましたが，集合を「ものの集まり」と思うことで数学的に矛盾が所持たりなど不都合があったりするのでしょうか.

お答え： あります．テキスト 3 ページ，ラッセルのパラドクスに関するコラムを見よ.

質問 24： 部分集合の定義のスライドについて，A が B の部分集合であることの定義では「A の元である任意の x は B の元である」ということを言っているのかなと思ったのですが，この x に “任意の” という記号がついていないことが気になりました．これは「x が A に含まれる」が条件であるということなのかなと考えたのですが正しいですか? その場合、もし “任意の” の記号がついていたら「A の元である任意の x が存在するならば」という条件になりそうですが、これはよく考えてみると「A が空集合でなければ真」になる条件になるのでしょうか? また部分集合の定義の「x が A の元であるならば x は B の元である」は条件ですか? 命題ですか? x が何であるかによるので条件なのかなと思ったのですが、ここの違いがあまりつかめていません。

お答え： 強いていえば「任意の x が $x \in A$ を満たすならば $x \in B$」でしょうか？「A の元である任意の x が存在するならば」は意味が通じません.

質問 25： 有限集合 X の冪集合を 2^X と書くのは自然だと思ったのですが，X が無限集合の場合でも 2^X と書くことに少し違和感を覚えます．X が無限集合のとき X の要素数は定義できないと思うのですが，要素数に相当する概念

（濃度？）を導入すればうまく理解できるのでしょうか？

お答え： 濃度を導入して理解できるわけではありません．2^X はただの記号です．

質問 26： 巾集合の表記で 2^X と表していたが，無限集合のときは，元の個数に関しては数えられないと思うけれど，そのような表記でいいのか．

お答え： 有限集合であっても，例えば $2^{\{0,1\}}$ という記号の意味は自明ではありませんね．2^X という「新しい記号」を定義しただけ，と思ってください．

質問 27： 要素を n 個持つ集合 A に対するべき集合の要素の個数は 2^n 個であると説明がありますが，可算個や非可算の場合はどうなりますか．

お答え： 無限個になりますよね．可算か非可算かということでしょうか．最後の方で扱います．

質問 28： 有限集合 A の元の個数が n のとき，A の部分集合の個数が 2^n 個だからといって，冪集合 $\mathcal{P}(A)$ を 2^A とも表すのは，やりすぎ (もしくはこじつけ) な気がするとともに分かりやすいような気もした．このような若干こじつけ感の否めない記法は他にもどんなものがある (あった) のか気になった．

お答え： すぐに思いつかないですが，気がついたらどこかで話します．

質問 29： $X = \{x; p(x)\}$ というように集合の記述がされ，$p(x)$ は条件と教わったが，$p(x)$ が関数のように見えてしまうが，実際の具体例の表記では「x は 2 の倍数である」といった関数に見えない書き方がされていたため，関数として見ても良いのかどうかがきになった．

お答え： $\{真, 偽\}$ という集合に値をとる関数とみなせます．

質問 30： 集合を内包的に定義するときに $\{x; p(x)\}$ のように “;” で区切るか，$\{x\,|\,p(x)\}$ のように “|” で区切るかの 2 通りの書き方を見たことがあるのですが，先生は普段はどちらで書かれますか．またその理由があれば教えてください．

お答え： ; を使うことが多いです．たとえば条件が $|x| < 1$ だとすると，縦線と干渉して見にくくなるので．また，条件式の「高さ」が高いときに，縦線は高さの調整が必要で面倒くさい（もっとも，この場合は「長い縦線」を使った方がみやすいことがあり，その際は縦線を用いる）

質問 31： $\mathcal{P}(\varnothing)$ が演習で出題されましたが，写像の意味では，これはどう考えるのでしょうか．空集合が任意の集合の部分集合になることと同じ論法だと思いますが今はよくわかりません．今後解説があると有り難いです．

お答え：「写像の意味では」というフレーズが何を表すのかよく分かりません．

質問 32： 4 つの集合のベン図は見たことがあるのですが，一般に n 個の集合のベン図はどのように書けばよいのかと思いました．そもそも 2 次元でかけるのでしょうか．

お答え：「N 個の集合のベン図」でググると面白い．書けるけどわかりやすいとは思えない，という感じ．

質問 33：「集合の集合」はベン図で表すことができるのでしょうか．例：$A = \{0, 1, \{0, 1\}\}$ の場合，私は右の図（山田注：省略）が思い浮かびますが，どうでしょうか．

お答え： この図で「要素が 3 つ」に見えますか？

質問 34： 2 の倍数全体の集合を内包的表記で書いた際，条件は「x は 2 の倍数である」とあったが，これはトートロジーだと思った．$\{m; n \in Z, m = 2n\}$ という表記は正しいでしょうか．

お答え： $\{x; x \text{ は 2 の倍数}\}$ は 2 の倍数の集合です．$\{x; x \text{ は正の実数}\}$ は正の実数の集合です．この順番で書くと自然に思えませんか？ 実際これはトートロジーですが．ご提案の表記は $\{m; \exists n \in Z : m = 2n\}$ ですかね．

質問 35： 空集合の記号 $\varnothing$ に $\emptyset$ を使ってはいけないのはなぜなのか．

お答え： 古（いにしえ）の習慣らしい（cf. N. Bourbaki）．$\emptyset$ は TEX の著者である D. Knuth によるらしい．これを使っていけないわけではないが，同一文脈で混用するのはおかしい．

質問 36： 巾集合の記号 $\mathcal{P}(X)$ の $\mathcal{P}$ はなにか．P と違う感じがする． **お答え：**P とは違う文字．「スクリプト体の $\mathcal{P}$」，“script P” とよばれる筆記体風の文字で，ここでは TEX の `\mathcal{P}` を使っています．

質問 37： $A \cup B$, $A \setminus B$ は和集合，差集合と言っていたのに，$A \cap B$ は席集合と言わずに共通部分と言ったのは何か意図があったのか． **お答え：**積集合 $A \times B$ が別にあるので．$A \cup B$ は合併集合と呼ぶのが好きです．

質問 38： ベクトル空間を $\mathbb{R}^n$ の様に表していたが，実数の要素 n 個，複素数の要素 m 個のベクトルなどを考える際には $\mathbb{R}^n\mathbb{C}^m$ のように表記するのでしょうか． **お答え：**積集合の記号を用いて $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^m$ と書く．

質問 39： LATEX で `A\subseteqq B` 打つと $A \subseteqq B$ のように等号が下までスペースをとってしまい，見栄えが悪くなってしまうのがいやです．$\subseteqq$ を使いたいときにこの問題を解消する方法をご存知でしたら教えていただきたいです．

お答え： 自分は使わないので知りません．

質問 40： 特にありません **お答え：**me, too.