位相空間論第一（講義）(MTH.B201)

写像

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-1

東京工業大学理学院数学系

2024/04/23

Q and A

真部分集合

Q: 集合 A が任意に与えられたとき，$A \subsetneq B$ なる集合 B はつねに存在しますか? (集合を厳密に定義する必要がありそうですが)

「任意の集合 A に対して $A \subsetneq B$」となる集合 B が存在？

No. もしもそのような集合 B があったら

$B = B$ ($B \subsetneq B$ でない)、

「任意の集合 A をひとつとったときにそれに対して $A \subsetneq B$ となる B は存在？」

Yes $B = A \cup \{\{A\}\}$

$\boxed{A \notin A}$

Q and A

文脈依存.

Q: 集合に関する命題について考えるとき，普遍集合を想定して論証を進めることがある．その普遍集合は，命題に出てくる集合すべての和集合を考えればよいと感覚がある．それでは普遍集合として「自分自身以外のすべての対象を含む集合」を考えることは可能であるか？

- 対象 ?
- そこまで大きくするとつかまえにくい性質もある.

Q and A

Q: 演習で $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ を証明する問題があり，この問題では普遍集合はあるものとして扱いました．私はそれを仮定して解きました ($A - B = A \cap B^c$ を用いて解きました) が，普遍集合を仮定しないで解けるのでしょうか。私は普遍集合 U として $U = A \cup B \cup C$ とすればよいのではないかと思いました．上に関連した話ですが $A - B = A \cap B^c$ と書けることから，上のように差集合が現れる問題では自動的に普遍集合の存在を暗に仮定してよいのでしょうか。

$\mathcal{U}$

$$(A\cup B)-C \overset{\subset}{\underset{\supset}{=}} (A-C)\cup(B-C)$$

$$x\in (A\cup B)\setminus C \iff (x\in A\cup B)\wedge(x\notin C)$$

$$\iff (x\in A \vee x\in B)\wedge(\neg(x\in C))$$

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

$$\iff \{(x\in A)\wedge(\neg(x\in C))\}\vee\{(x\in B)\wedge(\neg(x\in C))\}$$

$$(p\overset{\vee}{\underset{\wedge}{\vee}} q)\overset{\vee}{\wedge} r = (p\underset{\vee}{\wedge} r)\overset{\vee}{\underset{\wedge}{\vee}}(\overset{q}{\cancel{p}}\underset{\vee}{\wedge}\overset{r}{\cancel{q}})$$

$$\iff \{(x\in A)\wedge(x\notin C)\}\vee\{(x\in B)\wedge(x\notin C)\}$$

$$\iff (x\in A\setminus C)\vee(x\in B\setminus C)$$

$$\iff x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$$

Q and A

Q: 集合の演算において対称差
$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ というものを導入していましたが，これは集合の集合に可換群の構造を入れるように思いました．また
$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ が成り立つので，積として「$\cap$」を考えれば環構造も入るように考えましたがいかがでしょうか．このような代数構造を考えることに利点などはありますでしょうか．

考え ϕ.

ブール環

$(x^2 = x)$

写像 cf. 線形写像

- $f : X \longrightarrow Y$

集合　集合

定義域　終域　像域　$f(x)$

Xの要素xに対しYの要素をただ1つ対応させる対応の規則。

- $f : X \ni x \longmapsto y \in Y$

定義域　終域の要素

$y = f(x)$

$X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$

$Y = \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$

$X \ni x \longmapsto f(x) = \pi$の小数第$x$位 $\in Y$

$X \ni x$に対して

$f(x) = \pi$の小数第x位の数.

$f(0) = 3$　　$f(4) = 5$

特別な写像 map mapping

- 変換 $f\colon X \longrightarrow X$ transformation
- 恒等変換 $\mathrm{id}_X\colon X \ni x \longmapsto x \in X$ identity (transf. map)
- 関数 $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ (または $\mathbb{C}$)(数) function. 函数 函数
- 写像の制限 $f: X \to Y$, $A \subset X$ のとき $f|_A : A \ni x \mapsto f(x) \in Y$. $f|_A : A \to Y$ ・f の A への制限

像・逆像

$f\colon X \longrightarrow Y;\ A \subset X,\ B \subset Y$

- $f(A) := \{f(a)\,;\ a \in A\}$

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$$

$$f([0,1]) = \{x^2 \mid 0 \leqq x \leqq 1\} = [0.1]$$

$$f([-1.1]) = [0.1]\ ;\ f(\mathbb{R}) = [0,\infty)$$

逆写像と同じ記号

- $f^{-1}(B) := \{x \in X\,;\ f(x) \in B\}$

集合

$$f^{-1}([0.1]) = \{x \mid 0 \leqq x^2 \leqq 1\}$$
$$= [-1.1]$$

$$f^{-1}([-1,1]) = \{x \mid -1 \leqq x^2 \leqq 1\} = [-1.1]$$