位相空間論第一（講義）(MTH.B201)

写像

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-1

東京工業大学理学院数学系

2024/04/23

像の性質

$f(x)$ $x \in X$

Theorem (4)

定理 4.1 $f: X \to Y$; $A_1, A_2, A \subset X$

1. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.
2. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
3. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
4. $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$

$f(A) = \{f(a) ; a \in A\}$

$= \{y \in Y ;$ ある $a \in A$ が存在して $y = f(a)\}$

3: $y \in f(A_1 \cap A_2) \Leftrightarrow y = f(a)$ となる $a \in A_1 \cap A_2$ が存在する

$\Leftrightarrow y = f(a)$ となる a で $a \in A_1$ & $a \in A_2$ ……

$\cancel{\Leftrightarrow} \Rightarrow$ $y = f(a) ; a \in A_1$ & $y = f(a) ; a \in A_2$ となる a がある

$\Leftrightarrow y \in f(A_1) \wedge y \in f(A_2) \Leftrightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)$

$f(A_1 \cap A_2) \subsetneq f(A_1) \cap f(A_2)$ ではない

例をつくれ!

逆像の性質

Theorem (t)

定理 4.3 $f\colon X \to Y$; B_1, B_2, $B \subset Y$

1 ▶ $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

2 ▶ $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2)$

3 ▶ $f^{-1}(A_1 \cap A_2) = f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2)$

4 ▶ $f^{-1}(A_1 \setminus A_2) = f^{-1}(A_1) \setminus f^{-1}(A_2)$

2: $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2$

$\Leftrightarrow f(x) \in B_1$ or $f(x) \in B_2$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1)$ or $x \in f^{-1}(B_2)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

Theorem (t)

定理 4.3 $f\colon X \to Y$; $A \subset X$, $B \subset Y$.

1 ▶ $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

2 ▶ $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

単射なら $=$

全 $=$

$f(1) = f(-1)$

単射でない

e.g. ・ $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$

$$f^{-1}(f([0,\infty))) = f^{-1}([0,\infty)) = \mathbb{R}$$

・ $$f(f^{-1}(\mathbb{R})) = f(\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{R}\}) = f(\mathbb{R})$$

$$= [0,\infty)$$

全射でない

$$f(\mathbb{R}) = [0,\infty) \subsetneq \mathbb{R}$$

合成

$f\colon X \longrightarrow Y;\ g\colon Y \longrightarrow Z$

- $g \circ f\colon X \ni x \longmapsto (g \circ f)(x) = g\bigl(f(x)\bigr) \in Y.$ Z

事実 (写像の合成に関する結合法則)

さらに $h\colon Z \longrightarrow W$ のとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ．（これを $h \circ g \circ f$ と書く）

全射・単射

$x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')$ ：あたりまえ（写像）

定義 (定義 3.7)

$\left(x \neq x' \xrightarrow{\text{対偶}} f(x) \neq f(x')\right)$

写像 $f\colon X \to Y$ が

- 単射 :⇔「$f(x) = f(x')$ ならば $x = x'$」が成り立つ． injection
- 全射：⇔ $f(X) = Y$ surjection
- 全単射：全射かつ単射

bijection （双射）

いくつかの性質

合成

$g \circ f(x)$

$= g(f(x))$

命題 (命題 3.12)

$f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow Z$

- f, g が全射 $\Rightarrow$ $g \circ f$ は全射
- f, g が単射 $\Rightarrow$ $g \circ f$ は単射

exercise

いくつかの性質

命題 (命題 3.12)

$f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$

- $g \circ f$ が全射 $\Rightarrow$ g は全射
- $g \circ f$ が単射 $\Rightarrow$ f は単射

系 (系 3.14)

$f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow X$

- $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ $\Rightarrow$ f, g は全単射

$g \circ f : X \to X$

$f \circ g = Y \to Y$

$g = f^{-1}$

$f = g^{-1}$

逆写像

〃

逆写像

$f\colon X \to Y$: 全単射

- $f^{-1}\colon Y \ni y \longmapsto x \in X$;
  ただし x は $f(x) = y$ を満たす唯一の $x \in X$.

事実 (系 3.14)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ が $g \circ f = \mathrm{id}_Y$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ を満たす
$\Rightarrow f$ は全単射で $g = f^{-1}$.

本日の課題の提出締切は

2024 年 04 月 25 日（木曜日）07:00 JST