

# 位相空間論第一（講義）(MTH.B201)

写像

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

<http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-1>

東京工業大学理学院数学系

2024/04/23 (2024/04/29 訂正)

# 像の性質

## Theorem (定理 4.1)

$f: X \rightarrow Y; A_1, A_2, A \subset X$

- ▶  $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$ .
- ▶  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- ▶  $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
- ▶  $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$

# 逆像の性質

## Theorem (定理 4.3)

$f: X \rightarrow Y; B_1, B_2, B \subset Y$

- ▶  $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$
- ▶  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2)$
- ▶  $f^{-1}(A_1 \cap A_2) = f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2)$
- ▶  $f^{-1}(A_1 \setminus A_2) = f^{-1}(A_1) \setminus f^{-1}(A_2)$

# 像・逆像の性質

## Theorem (定理 4.3)

$f: X \rightarrow Y; A \subset X, B \subset Y.$

- ▶  $f^{-1}(f(A)) \supset A.$
- ▶  $f(f^{-1}(B)) \subset B.$

# 合成

$$f: X \longrightarrow Y; g: Y \longrightarrow Z$$

$$\blacktriangleright g \circ f: X \ni x \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in Z.$$

事実 (写像の合成に関する結合法則)

さらに  $h: Z \longrightarrow W$  のとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ. (これを  $h \circ g \circ f$  と書く)

# 全射・単射

## 定義 (定義 3.7)

写像  $f: X \rightarrow Y$  が

- ▶ 単射 :  $\Leftrightarrow$  「 $f(x) = f(x')$  ならば  $x = x'$ 」 が成り立つ.
- ▶ 全射 :  $\Leftrightarrow f(X) = Y$
- ▶ 全単射 : 全射かつ単射

# いくつかの性質

## 命題 (命題 3.12)

$$f: X \longrightarrow Y, g: Y \longrightarrow Z$$

- ▶  $f, g$  が全射  $\Rightarrow g \circ f$  は全射
- ▶  $f, g$  が単射  $\Rightarrow g \circ f$  は単射

## いくつかの性質

### 命題 (命題 3.12)

$$f: X \longrightarrow Y, g: Y \longrightarrow Z$$

- ▶  $g \circ f$  が全射  $\Rightarrow g$  は全射
- ▶  $g \circ f$  が単射  $\Rightarrow f$  は単射

### 系 (系 3.14)

$$f: X \longrightarrow Y, g: Y \longrightarrow X$$

- ▶  $g \circ f = \text{id}_X, f \circ g = \text{id}_Y \Rightarrow f, g$  は全単射

# 逆写像

$f: X \rightarrow Y$ : 全単射

▶  $f^{-1}: Y \ni y \mapsto x \in X$ ;

ただし  $x$  は  $f(x) = y$  を満たす唯一の  $x \in X$ .

事実 (系 3.14)

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$  が  $g \circ f = \text{id}_X, f \circ g = \text{id}_Y$  を満たす  
 $\Rightarrow f$  は全単射で  $g = f^{-1}$ .