2024 年 04 月 23 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

# 位相空間論第一（講義）(MTH.B201) 講義資料 3

## お知らせ

- 23 名の方から課題提出がありました．T2SCHOLA にて返却しておりますのでご確認ください．なお，用紙に記入されているコメントは山田用のメモです．読めない字があるかもしれませんが，この資料に回答やコメントがありますのでそちらを参照してください．
- 一名，提出された pdf が白紙（提出用紙のフォーマットに何も書き加えられていない）のものがありました．提出の際にはご確認ください．

## 前回までの訂正

- 黒板 B：Lemniscate の自己交点に $t = \pi/2$ が 2 つ書いてあるが，一方は $t = 3\pi/2$.

## 授業に関する御意見

- 4/16 のものとして公開された講義録画が 4/9 のものになっていると思います． **山田のコメント：** ありがとうございます.
- 集合を定義から証明することは非常に面白いですが，ベン図で示したり命題論理を全パターン数え上げたりするごり押しも好きです． **山田のコメント：** ベン図で「ちゃんと」示すのって難しくないですか？
- 学生の全ての質問に対して，丁寧に回答していることに驚き，素晴らしいと感じました．今後もできる限り続けて頂きたいです． **山田のコメント：** いいかげんですが.
- 授業中にしっかり質問や意見への返答の時間が用意されていてとても良いと思いました． **山田のコメント：** はい.
- 質問への回答を全体の場で答えてくださるのはテキストだけを読むより理解しやすくてよかったです．これからも講義の時間に答えられそうなら続けてもらえるとありがたいです． **山田のコメント：** 了解.
- フィードバックは大事なことではありますが、些か時間をとりすぎかと思います． **山田のコメント：** 実は講義の内容の半分を「次回送り」と考えています.
- 講義で扱っている内容について，教科書「これからの集合と位相」の対応ページを示してほしい． **山田のコメント：** 対応する節は初回の予定表で示していますね.
- 空集合の集合というところを説明する時とても分かりやすくて，面白いです． **山田のコメント：** はい.
- コップと洗濯ばさみのデモンストレーションは面白かった． **山田のコメント：** Thanks.
- 休けい時間はもっと少なくても，私は，大丈夫です．解説をもっと聞きたいと思っています． **山田のコメント：** 当方があまり大丈夫じゃない.
- 証明を授業中に丁寧に追っていてとても分かりやすいと思います． **山田のコメント：** Thanks.

## 質問と回答

**質問 1：** 命題論理のおけるド・モルガンの法則の定理の証明は，黒板にある真偽の表を書くことで示せたことになりますか． **お答え：**「完全性定理」で検索してみてください.

**質問 2：** 講義で真偽表を使ってド・モルガンの法則を証明しました．演習では真偽表を使っての証明がありました．真偽の一致を使って等号の成立を証明することがどうして厳密な証明になりますか？/ ド・モルガンの定理の証明をする際，$P$ と $Q$ の $\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ で証明を行っていたが，個人的にたまたま T と F が一緒になっただけのように感じてしまい，あまり納得した気がしなかったがこれに関して他の論証であったりするものがあるのかが気になった． **お答え：** 完全性定理からの帰結.

.

**質問 3：** 今回，命題論理におけるド・モルガンの法則と集合におけるドモルガンの法則を確認したが，この 2 つはたまたま結果が一致しただけなのか? それともなにか関わりがあるのか?

**お答え：** 集合のド・モルガンの法則はどうやって証明したか思い出してください.

**質問 4：** 授業の時命題の真偽性と集合の関係について話しましたが，命題の真偽性を通じて集合の関係などを計算する例がありますか. **お答え：**今回のド・モルガンの法則の証明はいかがですか？

**質問 5：** 例えば集合 $A = \{1, 2, 3\}$ と書くと外延的記法ですが，$A = \{x;\, x$ は $\{1, 2, 3\}$ の要素$\}$ と書くだけで内包的記法とされますか？

**お答え：** たとえば $\{(\cos t, \sin t)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ はどちらでしょう？ 厳密に分けられるものでもないのではないかと思います.

**質問 6：** $SO(2) = \left\{\begin{pmatrix} cost & -sint \\ sint & cost \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}\right\}$（原文ママ）という表記が外延的だという説明に違和感を感じた. $t \in \mathbb{R}$ のような条件の下で機械的に全要素を列挙できるものも外延的と表現すると考えれば納得できたのですが，この理解で正しいのでしょうか **お答え：**そのつもり. 違和感を意識して “ ” で囲いました.

**質問 7：** 集合 $A$ が任意に与えられたとき，$A \subsetneq B$ なる集合 $B$ はつねに存在しますか? (集合を厳密に定義する必要がありそうですが) **お答え：**「任意の集合 $A$ に対して $\subsetneq B$」となる集合が存在するか？ という問いでしょうか. そうであれば存在しない. 実際，そういう $B$ が存在するとしたら $B \subsetneq B$ ではないので.「与えられた集合 $A$ に対して $A \subsetneq B$ を満たす $B$ は常に存在するか」という問いであれば存在します. 実際 $B = \{A, \{A\}\}$ とすればよい（$A \notin A$ なので $B \setminus A = \{A\} \neq \varnothing$）.

**質問 8：** 集合の証明で $A = B$ を示すとき，$A \subset B$ と $A \supset B$ を示すことによる証明方法を学びましたが，$A = A' = \cdots = B$ というように集合を等式変形のような形で変形する方法でも問題ないですか.

**お答え：** $A = B$ かつ $B = C$ ならば $A = C$ であることが証明できるので問題ないです.

**質問 9：** ド・モルガンの法則は 3 つ以上の集合に対しても成立しますか. **お答え：**テキスト 13 ページ.

**質問 10：** 集合に関する命題について考えるとき，普遍集合を想定して論証を進めることがある. その普遍集合は，命題に出てくる集合すべての和集合を考えればよいと感覚がある. それでは普遍集合として「自分自身以外のすべての対象を含む集合」を考えることは可能であるか？

**お答え：** 対象は何か？

**質問 11：** 等式の証明において「普遍集合 $X$ の部分集合 $A, B$」という書き方は必ず書かなくてはならないのでしょうか.

**お答え：** 文脈に依存します.

**質問 12：** 集合の同値性を証明するとき，特に何に注意すればいいですか？

**お答え：** 答えようがないですよね. しいていえば，ちゃんと証明になっているか.

**質問 13：** 論文で「$\therefore$, $\because$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$ $\Rightarrow$」のような記号は使わない方が良い，とありましたが理由はありますか.

**お答え：** 習慣.

**質問 14：** 条件と命題の違いが理解しきれていないのですが，2 つの違いは何ですか. また両者の区別を曖昧にすると困るようなことがあるのでしょうか？

**お答え：** 前半：テキスト p. 3. $x$ を与えるごとに「真偽がきまる文」（命題）となるような文 $P(x)$ を条件といっています. 後半：上の回答をみてどう考えるか.

**質問 15：** 本日は命題論理における対偶に関して学びましたが，数学である命題を証明する手法として良く対偶法・背理法を用いましたがこの両者は示す方法がほぼ同じであると以前から思っていたのだが本質的には同じことなのか，知りたいです。

**お答え：** “$P \Rightarrow Q$” を示すのに (1) not$Q \Rightarrow$ not$P$ を示す（対偶法）(2) not$Q$ ならば $P$ に矛盾しているので not$P$ であると結論づける（対偶法）. 厳密に分けられるものでもないと思います.

**質問 16：** 演習で $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ を証明する問題があり，この問題では普遍集合はあるものとして扱いました. 私はそれを仮定して解きました ($A - B = A \cap B^c$ を用いて解きました) が，普遍集合を仮定しないで解けるのでしょうか。私は普遍集合 U として $U = A \cap B \cap C$ とすればよいのではないかと思いました. 上に関連した話ですが $A - B = A \cap B^c$ と書けることから，上のように差集合が現れる問題では自動的に普遍集合の存在を暗に仮定してよいのでしょうか。

**お答え：** なるほど $U$ をそう取ればよさそうですね. 普遍集合を仮定しなくても証明できます. $x \in (A \cap B) \setminus C \Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \notin C)$. 後半は文脈による.

**質問 17：** 高校数学ではド・モルガンの法則が論証の役に立ったという経験があまりないのだが，大学数学ではどうなのか. **お答え：**注意して見てください.

**質問 18：** 集合の表記に関しての質問なのですが $A - B$ と $A \cap B^c$ について，これは集合的に同じものとして扱って大丈夫でしょうか．また，全体集合がどのような集合を取るときでも成り立ちますでしょうか。そこのところの回答をお願いします．

**お答え：** 普遍集合 $X$ の部分集合 $A, B$ を考えるなら同じもの．普遍集合を考えていないと $B^c$ は定義できない．

**質問 19：** 演習の問題を眺めていると，$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ のように、集合の演算では基本的に分配法則が成り立つように思えるのだが、その考えは正しいのか．それとも成り立たない演算があるのか．

**お答え：** $A \cup (B \setminus C)$ と $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$ は等しいか（テキスト 10 ページの問題 2 参照）．

**質問 20：** 記号 $\cap, \cup$ について，解析の講義では下付きの ${}_\cap$ や上付きの ${}^\cup$ を使っていました．見やすいのでそれを使いたいですが，問題ないですか？ **お答え：**混用がなければよいです．

**質問 21：** 集合の演算において対称差 $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ というものを導入していましたが，これは集合の集合に可換群の構造を入れるように思いました．また $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ が成り立つので，積として「$\cap$」を考えれば環構造も入るように考えましたがいかがでしょうか．このような代数構造を考えることに利点などはありますでしょうか． **お答え：**確かにそうですね．山田は使ったことがないですが，こうしてできる環はブール環とよばれ，様々な応用があるようです．

**質問 22：** 講義の最初に講義の「義」という漢字についての話をされていましたが，先生が「講」という字を手書きしたときの書き順が一般的に正しいとされるものと違っていたように思いました．この字の旁を「井」の下に「再」をくっつけたような形と見たときに，この「井」の部分を先生は縦，縦，横，横という順で書いていたと思いますが，一般的には横，縦，縦，横という書き順で書くものと思われます．(まあ字そのものの間違いと違って，書かれた後のものを見ても書き順の違いが意識されることはないと思いますが...)

**お答え：** ありがとうございます．

**質問 23：** 教科書を見ていた所，$\mathbb{R}$ の区間の定義において $(-\infty, \infty)$ は開区間に分類されているのに対し，$[a, \infty)$ や $(-\infty, b]$ は閉区間に分類されていました（p. 6)．私としては $(-\infty, \infty)$ が開区間であるのは納得できるのですが，それならば $[a, \infty)$ や $(-\infty, b]$ は半開区間として扱うべきなのではないのかと思ったのですが，どうでしょうか．

**お答え：** 有界でない区間のよび方はそれほど一般的ではないと思いますが，$[a, \infty)$ は $\mathbb{R}$ の通常の位相に関する閉集合なので（2Q に扱う）そう呼んでいるのだと思います．

**質問 24：** 証明問題において，前提としてよいものとそうでないものの区別が明確でないように感じるのですがなにか基準はありますか．例えば授業や演習で扱った定理，どちらでも触れられていないが教科書に記述があるものなどはどこまで証明なしで使ってよいのでしょうか．

**お答え：** あいまいですよね．どこまで戻るか悩ましい．実際に数学を記述するとき（論文などを想定している）は何を使ってもよいですが，適切な引用が必要です．

**質問 25：** 命題の論理演算子は $\neg, \wedge, \vee$ で十分なのでしょうか． **お答え：**十分とは？

**質問 26：** 今回は特にありませんでした． **お答え：**そう？