

位相空間論第一（講義）(MTH.B201)

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

`http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-1`

東京工業大学理学院数学系

2024/04/30

お知らせ

- ▶ 20名の方から課題提出がありました。T2SCHOLAにて返却しておりますのでご確認ください。
なお、用紙に記入されているコメントは山田用のメモです。
読めない字があるかもしれませんが、この資料に回答やコメントがありますのでそちらを参照してください。

訂正

映写資料・黒板 C, 4/10 ページ：(修正を入れたのが間違っていて修正前が正しい)：

- ▶ (誤) $f^{-1}(f(A)) \subset A$; (正) $f^{-1}(f(A)) \supset A$

$x \in A$ \rightarrow $f(x) \in f(A) \subset B \therefore x \in f^{-1}(B) = \underline{f^{-1}(f(A))}$

- ▶ (誤) $f(f^{-1}(B)) \supset B$; (正) $f(f^{-1}(B)) \subset B$

$X = \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

$A = [0, 1] \quad f(A) = [0, 1]$

$f^{-1}(f(A)) = [-1, 1]$

ご意見から

- ▶ 講義で定理を紹介するとき、条件が欠けると成立しない例があることを示してほしい。
- ▶ 間違いやすいところに反例を挙げることで、そのような間違いを避けることに役立つ。

ご意見から

$$f: X \longrightarrow Y$$

- ▶ 個人的には単射であることの証明よりも全射であることの証明の方が難しく感じる。

単射: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
等式の証明 ✓

全射: $y \in Y \Rightarrow \underbrace{f(x) = y}_{\text{が保たれる}} \text{ であり } x \in X$
方程式を解く ✓

Q and A

$f^{-1}(x)$ ← 像の元 $f^{-1}(B)$ ← 像の部分集合

Q: 写像と逆写像の違いがよく分からなかった。なぜ同じ記号なのか。

f が全射だから f^{-1} だって

A: 区別がつくから。

$\gamma = \mathbb{R}$ $f(x) = 2x$ $f^{-1}(1) = \frac{1}{2}$ $f^{-1}(\{1\}) = \{\frac{1}{2}\}$
 $f(x) = x^2$ $f^{-1}(1) : \text{undefined}$ $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$

Q: 定義域が $A = \{0, \{0\}\}$ のような集合となっている写像で $f(0)$ のように記述した場合、これが A の要素 $\{0\}$ に f が対応させている要素を指しているのか、 A の部分集合 $\{0\}$ の f による像なのか見分けがつかないと思うのですが、このような場合は前後の文脈などからこれらの見分けがつくように工夫するしかないのでしょうか。

$f(\{0\})$ $\{0\} \in A$ 区別がつかない
 $\{0\} \subset A$

ことばで補う

Q and A

$$\left(\begin{array}{ccc} f: X & \rightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right)$$

Q: ある集合の元を別の集合の元に対応させる構造を持つもので、写像でないものを考えるとすれば、「定義域の元の中に像域の元と対応していないものがある」だとか「定義域の元の中に複数の像域の元と対応しているものがある」が考えられるが、これらをいまの「写像」の枠組みの中に入れることを許すと何か不利益が生じるのか。

ϵ : epsilon ϵ for "element" $f(x)$ と対応しない

Q: 写像とは定義域全体に写した行き先がないといけないと言う話でした. $f: x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x}$ のように移した先に定義できない値がある場合は (こんな簡単な場合でも) 写像とはいえないのでしょうか. また写す先が定義できない場合それを 空集合に写るとすることで全て写像として扱えそうに思えるのですが, 正しいでしょうか.

$$\left(\begin{array}{l} \in \\ \ni \end{array} \right) f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{1}{x} \in \underline{\underline{\mathbb{R}}}$$

Q and A

Q: 普遍集合 X を実数全体とした時に、ある部分集合 A を用意すると、 A は集合であるので普遍集合 X は集合 A を要素に持つことはできないという認識は正しいですか？

A: A が " X の" 部分集合なら正しい。「認識」って何？

$$A \subset X$$

$$A \notin X$$

Q and A

Q: \forall, \exists の記号を頑なに使わずに日本語で書いていますが、何か意図はありますか？ 使った方が短いしわかりやすい気がします。

于

- 書き下し字の人が一般に敬む。

$\forall \exists$: 論文字と \exists は一般に使わぬ。

$\{x \mid \forall y \in Y \dots\}$

講義

この後、短い休憩をとり、「講義」を行います。

1 直積（テキスト §5）

2 直積・同値関係（テキスト §5）