位相空間論第一（講義）(MTH.B201)

直積・同値関係

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-1

東京工業大学理学院数学系

2024/04/30

Q and A

Q: 演習等で A の部分集合 A_1 等ととって $f(A_1)$ ととっているが，それが空集合だった場合 $f(A_1)$ が $\varnothing$ として定義できるのか，それとも $A_1 \neq \varnothing$ とした方がよいのか気になりました．

$$f(A_1) = \{ f(x) \,;\, x \in A_1 \}$$

$$= \{ y \,;\, \text{ある } x \in A_1 \text{ が存在して } y = f(x) \}$$

成立しない

$$A_1 = \phi$$

$y \in f(A_1)$: 成立しない

$$f(A_1) = \phi$$

Q and A

Q: 系 3.14 の f, g で $g \circ f = \mathrm{id}_X$ という条件のみで f は全単射で $g = f^{-1}$ であることはいえるか．もしそうでなければ反例を挙げてもらいたいです．

系 (系 3.14)

$f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow X$

- $\underline{g \circ f = \mathrm{id}_X}$, $\underline{f \circ g = \mathrm{id}_Y}$ $\Rightarrow$ f, g は全単射

$$\left(\begin{aligned} g &= f^{-1} \\ f &= g^{-1} \end{aligned} \right)$$

$X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$

$f(x) = x + 1$ 全射でない…

$g \circ f(x) = x$

$$g(y) = \begin{cases} 1 & (y = 1) \\ y - 1 & (y \geq 2) \end{cases}$$

単射でない…

$(f \circ g = ?)$

Q and A

Q: 有限集合のときだけ成り立つ（無限集合であるとき成り立たない）像の性質ってありますか？

X が有限集合 $\iff$ $f: X \to \{1, \dots, n\}$ が存在する。

全単射

有限集合

命題 (命題 3.18)

$X\ (\neq \varnothing)$ が「有限集合である」$\Leftrightarrow$
ある正の整数 n と X から $\{1, 2, \ldots, n\}$ への全単射が存在する．

命題 (命題 3.20)

$X\ (\neq \varnothing)$ が有限集合であるとき，次は同値：

- $f\colon X \to X$ が全射
- $f\colon X \to X$ が単射

$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$　　$f(x) = x+1$

・単射
・全射でない

$\mathbb{N}$ は有限集合でない

Hilbert のホテル

直積集合

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) ; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$

$(1,2) \neq (2,1)$

- 集合 A, B に対して

$$A \times B := \{(a,b) \,;\, a \in A, b \in B\}$$

- 集合 A_1, ..., A_n に対して

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) \,;\, a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

記号：

$$\prod_{j=1}^{n} A_j := A_1 \times \cdots \times A_n$$

射影

- 射影

(n-tuple)

A_i

$$p_i : A_1 \times \cdots \times A_n \ni \underline{(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)} \mapsto \underline{\underline{a_i}} \in A_i$$

第 i 射影　　i-th projection

グラフ (写像のグラフ ← 関数のグラフ)

写像 $f\colon X \to Y$ に対して

$$\Gamma_f := \{(x, f(x))\,;\, x \in X\} \subset X \times Y$$

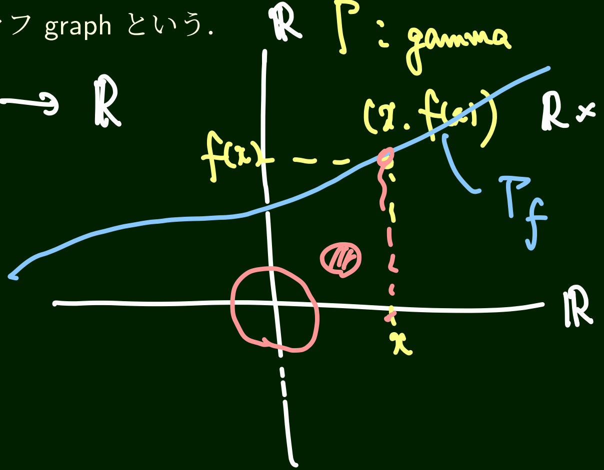
を f のグラフ graph という.

これを graph という

Γ : gamma

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$



グラフの特徴づけ

定理 (定義 5.3 & 命題 5.4)

$\varGamma \subset X \times Y$ がある写像 $f\colon X \to Y$ のグラフになるための必要十分条件は

$$\left(\begin{array}{l}\text{任意の } x \in X \text{ に対して} \\ (x, y) \in \varGamma \text{ となる } y \in Y \text{ がただひとつ存在する}\end{array}\right) \tag{5.2}$$

となることである．
さらに $\varGamma$ が (5.2) を満たすとき，$\varGamma = \varGamma_f$ となる $f \in Y^X$ は唯一．

$Y^X = \{ f\colon X \to Y$, すべて

空写像

命題 (命題 5.4)

X から Y への写像全体の集合 Y^X は

$$\mathcal{G} := \{\Gamma \in X \times Y \,;\, \Gamma \text{ は (5.2) を満たす}\}$$

と同一視できる.

とくに $X = \varnothing$ のとき：空写像 $f_\varnothing$

$f_\phi : \phi \to Y$

$\leftrightarrow \{(x,y) \in \underbrace{\phi \times Y}_{= \phi} \,;\, f_\phi(x) = y\} = \phi$