位相空間論第一（講義）(MTH.B201)

直積・同値関係

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-1

東京工業大学理学院数学系

2024/04/30 (2024/05/07 訂正)

Q and A

Q: 演習等で A の部分集合 A_1 等ととって $f(A_1)$ ととっているが，それが空集合だった場合 $f(A_1)$ が $\varnothing$ として定義できるのか，それとも $A_1 \neq \varnothing$ とした方がよいのか気になりました．

Q and A

Q: 系 3.14 の f, g で $g \circ f = \mathrm{id}_X$ という条件のみで f は全単射で $g = f^{-1}$ であることはいえるか．もしそうでなければ反例を挙げてもらいたいです．

系 (系 3.14)

$f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow X$

- $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y \Rightarrow f$, g は全単射

Q and A

Q: 有限集合のときだけ成り立つ（無限集合であるとき成り立たない）像の性質ってありますか？

有限集合

命題 (命題 3.18)

$X\ (\neq \varnothing)$ が「有限集合である」$\Leftrightarrow$
ある正の整数 n と X から $\{1, 2, \ldots, n\}$ への全単射が存在する.

命題 (命題 3.20)

$X\ (\neq \varnothing)$ が有限集合であるとき，次は同値：

- $f\colon X \to X$ が全射
- $f\colon X \to X$ が単射

直積集合

- 集合 A, B に対して

$$A \times B := \{(a, b) \,;\, a \in A, b \in B\}$$

- 集合 A_1, …, A_n に対して

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) \,;\, a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

記号：

$$\prod_{j=1}^{n} A_j := A_1 \times \cdots \times A_n$$

射影

- 射影

$$p_i \colon A_1 \times \cdots \times A_n \ni (a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_i \in A_i$$

グラフ

写像 $f\colon X \to Y$ に対して

$$\mathit{\Gamma}_f := \{(x, f(x))\,;\, x \in X\} \subset X \times Y$$

を f のグラフ graph という．

グラフの特徴づけ

定理 (定義 5.3 & 命題 5.4)

$\Gamma \subset X \times Y$ がある写像 $f\colon X \to Y$ のグラフになるための必要十分条件は

$$\begin{array}{l}\text{任意の } x \in X \text{ に対して} \\ (x, y) \in \Gamma \text{ となる } y \in Y \text{ がただひとつ存在する}\end{array} \tag{5.2}$$

となることである.
さらに Γ が (5.2) を満たすとき, $\Gamma = \Gamma_f$ となる $f \in Y^X$ は唯一.

空写像

命題 (命題 5.4)

X から Y への写像全体の集合 Y^X は

$$\mathcal{G} := \{\Gamma \subset X \times Y\,;\, \Gamma \text{ は } (5.2) \text{ を満たす}\}$$

と同一視できる.

とくに $X = \varnothing$ のとき：空写像 $f_\varnothing$