位相空間論第一（講義）(MTH.B201)

直積・同値関係

商集合

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-1

東京工業大学理学院数学系

2024/04/30

関係

X: 集合

- X 上の関係: $R \subset X \times X$
- x, y が R 関係にある $\Leftrightarrow (x, y) \in R$
- 記号：$x \sim_R y$: x と y が R 関係にある.
- "関係 $\sim$"

$x \sim y$

同値関係

$\sim$ \sim

定義

X の関係 $\sim$ が同値関係であるとは，任意の x, y, $z \in X$ に対して

- $x \sim x$, 1
- $x\,\mathrm{sim}\,y$ ならば $y \sim x$, 2
- $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$ 3

が成り立つこと．

→ (群の公理)

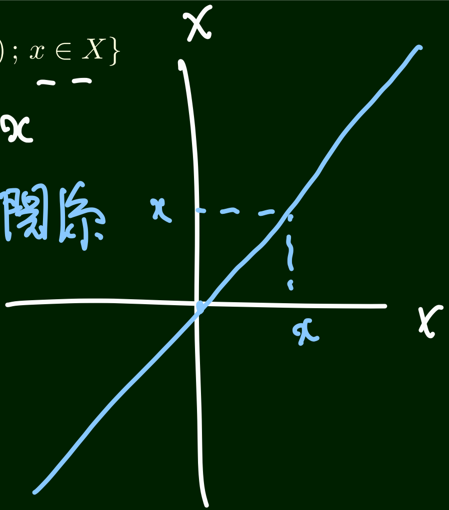
例：対角集合

diagonal set

集合 X に対して $D := \{(x, x) \,;\, x \in X\}$

$x \sim y \iff y = x$

同値関係



例：順序関係

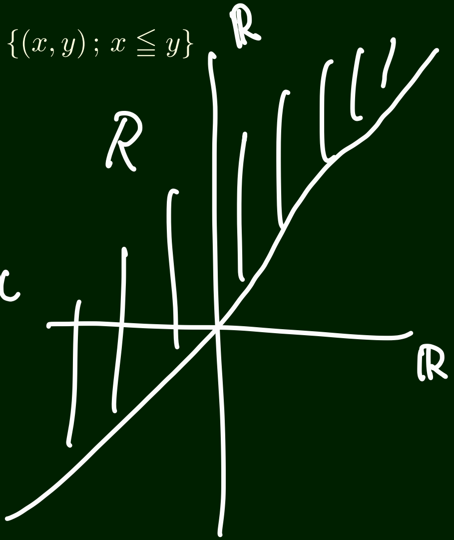
実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に対して $R := \{(x, y)\,;\, x \leqq y\}$

$x \sim y \iff x \leqq y$

- $x \leqq x$
- $x \leqq y \cancel{\Rightarrow} y \leqq x$

同値では‥

関係



例：部分空間

n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間 V に対して

$$R := \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \,;\, \underline{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \in V}\}. \quad \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$V \subset \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であるとは

- $x, y \in V \Rightarrow x + y \in V$
- $x \in V, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x \in V$
- $V \neq \emptyset$

(V が $\mathbb{R}^n$ の線形演算でベクトル空間になる)

$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n ; y - x \in V\}.$ $\sim$: 同値関係

$\because$ $\cdot$ $x - x = 0 \in V$ $\therefore$ $x \sim x$

$\cdot$ $x \sim y \Leftrightarrow y - x \in V \Rightarrow -(y - x) \in V$

$\Rightarrow x - y \in V \Rightarrow y \sim x$

$\cdot$ $x \sim y, \ y \sim z \Rightarrow y - x \in V, \ z - y \in V$

$\Rightarrow (y - x) + (z - y) \in V$

$\Rightarrow z - x \in V \Rightarrow x \sim z$

同値類と商集合

$\sim$: 集合 X 上の同値関係
$x \in X$ に対して

$$[x] := \{y \in X \,;\, y \sim x\} \subset X \qquad (x \text{ の同値類})$$

補題

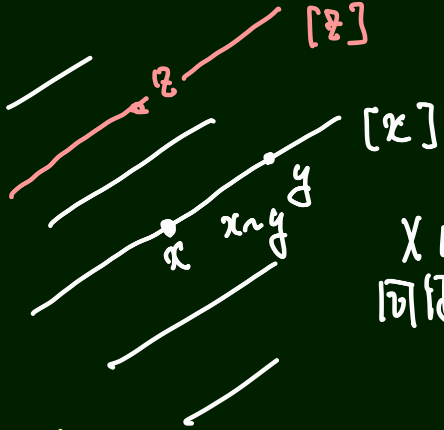
$x \in X$ に対して

- $x \in [x]$. $(\because)$ $x \sim x$
- $[x] = [y] \Leftrightarrow \underline{y \sim x}$. $(\because)$ $\Rightarrow$ $z \in [x] \Rightarrow \underline{z \sim x}$, $[x] = [y] \Rightarrow \underline{z \sim y}$; $x \sim z$, $z \sim y$ $\Rightarrow x \sim y$; $\Leftarrow$ 略
- $y \not\sim x \Rightarrow [x] \cap [y] = \varnothing$

定義 (商集合)

$$X/\sim = \{[x] \,;\, x \in X\}$$

$X, \sim$



Xは互いに交わらない同値類に分けられる

$$X/\sim \; := \{ [x] \; ; \; x \in X \}$$

商集合

例：対角集合

集合 X に対して $D := \{(x,x)\,;\,x \in X\}$

$\sim$

$[x] = \{x\}$

$x \sim y \Leftrightarrow y = x$

$X/\sim\ = \{[x] \mid x \in X\}$

$= \{\{x\} \mid x \in X\}$

X と同一視できる！

例：部分空間

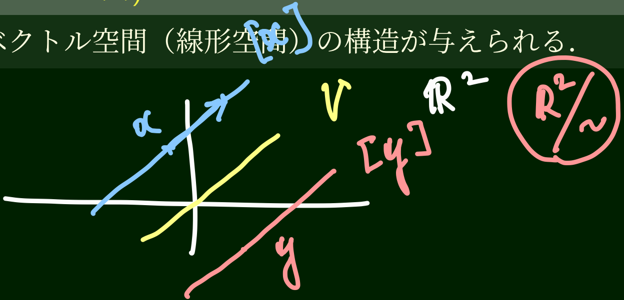
n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間 V に対して

$$R := \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \,;\, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \in V\}.$$

同値関係 $\sim$ を定める．

事実 (商ベクトル空間)

$\mathbb{R}^n / \sim$ にはベクトル空間（線形空間）の構造が与えられる．



例：射影空間

n+1　n+1

$(\mathbb{R}^n)^* := \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対して

n+1

$R := \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in (\mathbb{R}^n)^* \times (\mathbb{R}^n)^* \,;\, \underline{\boldsymbol{y}} = \lambda \underline{\boldsymbol{x}}$ を満たす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在$\}$

定義 (射影空間)

$P(\mathbb{R}^n) := (\mathbb{R}^n)^{*}/\sim$ を n 次元実射影空間とよぶ.

n+1　n+1　$\mathbb{RP}^n$

本日の課題の提出締切は

2024 年 05 月 02 日（木曜日）07:00 JST

本日の課題の提出締切は

2024 年 05 月 02 日（木曜日）07:00 JST