

# 位相空間論第一（講義）(MTH.B201)

直積・同値関係

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

<http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-1>

東京工業大学理学院数学系

2024/04/30

# 関係

$X$ : 集合

- ▶  $X$  上の関係:  $R \subset X \times X$
- ▶  $x, y$  が  $R$  関係にある  $\Leftrightarrow (x, y) \in R$
- ▶ 記号:  $x \sim_R y$ :  $x$  と  $y$  が  $R$  関係にある.
- ▶ “関係  $\sim$ ”

# 同値関係

## 定義

$X$  の関係  $\sim$  が同値関係であるとは, 任意の  $x, y, z \in X$  に対して

- ▶  $x \sim x$ ,
- ▶  $x \sim y$  ならば  $y \sim x$ ,
- ▶  $x \sim y$  かつ  $y \sim z$  ならば  $x \sim z$

が成り立つこと.

## 例：対角集合

集合  $X$  に対して  $D := \{(x, x); x \in X\}$

## 例：順序関係

実数全体の集合  $\mathbb{R}$  に対して  $R := \{(x, y); x \leq y\}$

## 例：部分空間

$n$  次元数ベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  の部分空間  $V$  に対して

$$R := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n ; \mathbf{y} - \mathbf{x} \in V\}.$$

# 同値類と商集合

$\sim$ : 集合  $X$  上の同値関係  
 $x \in X$  に対して

$$[x] := \{y \in X; y \sim x\} \quad (x \text{ の同値類})$$

## 補題

$x \in X$  に対して

- ▶  $x \in [x]$ .
- ▶  $[x] = [y] \Leftrightarrow y \sim x$ .
- ▶  $y \not\sim x \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$

## 定義 (商集合)

$$X / \sim = \{[x]; x \in X\}$$

## 例：対角集合

集合  $X$  に対して  $D := \{(x, x); x \in X\}$

## 例：部分空間

$n$ 次元数ベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  の部分空間  $V$  に対して

$$R := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n ; \mathbf{y} - \mathbf{x} \in V\}.$$

同値関係  $\sim$  を定める.

事実 (商ベクトル空間)

$\mathbb{R}^n / \sim$  にはベクトル空間 (線形空間) の構造が与えられる.

## 例：射影空間

$(\mathbb{R}^n)^* := \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  に対して

$R := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^n)^* \times (\mathbb{R}^n)^* ; \mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} \text{ を満たす } \lambda \in \mathbb{R} \text{ が存在}\}$

定義 (射影空間)

$P(\mathbb{R}^n) := (\mathbb{R}^n)^* / \sim$  を  $n$  次元実射影空間とよぶ.