2024 年 04 月 30 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

位相空間論第一（講義）(MTH.B201) 講義資料 4

お知らせ

- 20 名の方から課題提出がありました．T2SCHOLA にて返却しておりますのでご確認ください．なお，用紙に記入されているコメントは山田用のメモです．読めない字があるかもしれませんが，この資料に回答やコメントがありますのでそちらを参照してください．

前回までの訂正

- 映写資料・黒板 B，5/8 ページ：（誤）$g(\bigl(f(x)\bigr) \in Y$；（正）$g(\bigl(f(x)\bigr) \in Z$
- 黒板 B，4/8 ページと 5/8 ページの間：（誤）$(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (p \wedge q)$；（正）$(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
- 黒板 C，4/10 ページ：下から 2 行目の $\Leftrightarrow$ は $\Rightarrow$ の誤り．
- 映写資料・黒板 C，4/10 ページ：（修正を入れたのが間違っていて修正前が正しい）：
  （誤）$f^{-1}(f(A)) \subset A$；（正）$f^{-1}(f(A)) \supset A$.
  （誤）$f(f^{-1}(B)) \supset B$；（正）$f(f^{-1}(B)) \subset B$

授業に関する御意見

- 個人的には単射であることの証明よりも全射であることの証明の方が難しく感じる．　**山田のコメント：** 一般的にそうですね．
- 講義で定理を紹介するとき，条件が欠けると成立しない例があることを示してほしい．　**山田のコメント：** なるべく．
- 間違いやすいところに反例を挙げることで，そのような間違いを避けることに役立つ．　**山田のコメント：** そうですね．
- 講義内容に直接は関係ないですが，講義資料 pdf にある「∋」をコピーして貼り付けると「3」になってしまいます.「∈」はそのまま貼り付けられるのに，謎です．　**山田のコメント：** ですね．
- 休憩がベストタイミングで助かります．　**山田のコメント：** はい．
- 割と頻繁に休憩をはさんでもらえるのは正直有難いです．　**山田のコメント：** 一応 2 回を予定しています．
- 質問への回答で新しく知ることや曖昧な理解の改善につながっているように感じるので続けてほしいです．
  山田のコメント： 手際よくやるようにします．
- 某講義で「関数でなく写像」と口酸っぱくおっしゃられている先生がいらっしゃるのですが, それがなぜか納得しました.
  山田のコメント： 良かったです．関数，function と言ってしまうこともありますね．
- 先生のやや達筆な字が好きです．　**山田のコメント：** Sorry!

質問と回答

質問 1： ある集合の元を別の集合の元に対応させる構造を持つもので，写像でないものを考えるとすれば,「定義域の元の中に像域の元と対応していないものがある」だとか「定義域の元の中に複数の像域の元と対応しているものがある」が考えられるが，これらをいまの「写像」の枠組みの中に入れることを許すと何か不利益が生じるのか．

お答え： すくなくとも安心して “$f(x)$” とかけませんね．

質問 2： 写像とは定義域全体に写した行き先がないといけないと言う話でした．$f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x}$ のように移した先に定義できない値がある場合は (こんな簡単な場合でも) 写像とはいえないのでしょうか．また写す先が定義できない場合それをを空集合に写るとすることで全て写像として扱えそうに思えるのですが，正しいでしょうか．

お答え： 前半：いえません．$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ とみなします．後半：すると像域はどうなりますか？

質問 3： 関数は写像の特殊な例であるとありましたが，2 変数関数もある種の写像と考えることができますか？

お答え： $\mathbb{R}^2$ の領域を定義域，$\mathbb{R}$ を像域とする写像です．

質問 4： 写像 $f\colon A \to B$ を集合として定義する場合に，$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ として f を集合 $\{\langle x, f(x)\rangle \mid x \in A\}$ と定義するようなのですが，この場合，終域がうまく特徴づけられていないと思います．写像というのは終域が等しくなければ異なるものとして扱うべきではないのでしょうか．

お答え： この定義はどこから来ていますか？ $\langle x, y\rangle$ の定義に含まれる x, y が動く範囲はどこに含まれていますか？

質問 5： 写像と逆写像の違いがよく分からなかった．なぜ同じ記号なのか．

お答え： 区別がつくから．$f\colon X \to Y$ が全単射であるとき，“$f^{-1}(y)$”（$y \in Y$）と書かれたら f^{-1} は逆写像を表す．（一般に全単射とは限らない）写像 $f\colon X \to Y$ に対して “$f^{-1}(B)$”（$B \subset Y$）とあれば f^{-1} は逆像を表す．

質問 6： 定義域が $A =\{0, \{0\}\}$ のような集合となっている写像で $f(0)$ のように記述した場合，これが A の要素 $\{0\}$ に f が対応させている要素を指しているのか，A の部分集合 $\{0\}$ の f による像なのか見分けがつかないと思うのですが，このような場合は前後の文脈などからこれらの見分けがつくように工夫するしかないのでしょうか．

お答え： たしかに微妙な状況ですね．おっしゃるとおり，この場合は区別がつけられないので言葉で説明すべきです．

質問 7： 演習等で A の部分集合 A_1 等ととって $f(A_1)$ ととっているが，それが空集合だった場合 $f(A_1)$ が $\varnothing$ として定義できるのか，それとも $A_1 \neq \varnothing$ とした方がよいのか気になりました．

お答え： 気になるだけでしょうか？ $f(A_1)$ の定義をそのまま $A_1 = \varnothing$ に適用するとどうなりますか？

質問 8： $\in$ として今まで見てきた記号を $\ni$ で使っていることを 2 年になって急に見るようになったが，何か意図があって使い分けているのか．($x \in X \mapsto y \in Y$ も $X \ni x \mapsto y \in Y$ も意味するところは全く同じだが，前者を後者のように書いていることがあるのはなぜか) **お答え：**“$x \mapsto y$” を目立たせるためには $X \ni x \mapsto y \in Y$ と書くのがよさそう．$x \in X \mapsto y \in Y$ では X に y が対応するように見える（見えない）が，このように書く人も多い．

質問 9： 普遍集合 X を実数全体とした時に，ある部分集合 A を用意すると，A は集合であるので普遍集合 X は集合 A を要素に持つことはできないという認識は正しいですか?

お答え： A が “X の” 部分集合なら正しい．「認識」って何？

質問 10： 先生のまわりに bijection のことを “双射” という人間はどれくらいいますか? bilinear map は双線形写像というように “bi” という接頭辞に “双” という訳を与えるのは至って自然だと思われますが，bijection に “全単射” という訳を最初に与えた人間がいるのであればそれはすごいと思いました． **お答え：**一度しか聞いたことがない．

質問 11： 系 3.14 の f, g で $g \circ f = \mathrm{id}_X$ という条件のみで f は全単射で $g = f^{-1}$ であることはいえるか．もしそうでなければ反例を挙げてもらいたいです． **お答え：**反例：X, $Y = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ として $f(x) = x + 1$, $g(y) = y - 1$ ($y \geqq 2$ のとき，$g(1) = 1$ とすると $g \circ f = \mathrm{id}_X$．

質問 12： f, g のうちすくなくとも一方が単射でなく，$g \circ f$ が単射，一方が全射でなく $g \circ f$ が全射となるものはありますか．また，$g \circ f$ が全単射のときに f, g の単射性と全射性が気になったので質問したいです．

お答え： 上の例参照．「気になっていたので質問したいです」ではどのような答えを期待しているのかわかりません．

質問 13： 有限集合のときだけ成り立つ（無限集合であるとき成り立たない）像の性質ってありますか？

お答え： たとえば X が有限集合で $f\colon X \to X$ が全射なら単射，単射なら全射．有限集合 X の真部分集合 Y に対して全単射 $f\colon X \to Y$，全単射 $g\colon Y \to X$ は存在しない．

質問 14： 条件をベン図で表したとき，ベン図中の各点は条件の変数に対応しているのだとわかりました．なので命題をベン図で表そうとしてもあまり意味がないように思えます．しかし，命題とその対偶の真偽が一致することの説明でベン図を用いているものを見たことがあります．このベン図は何を表しているのでしょうか．

お答え： ご質問にある URL を拝見すると，条件と集合を同一視しているように思えますね．いずれにせよ $P \subset Q$ と $Q^c \subset P^c$ が同じことを表している，ということですよね．

質問 15： $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ の証明のように，一般の写像の逆像を考えることがあるが，その時にその写像が単射なのか，全射なのか，どちらでもないのかの議論が必要なケースはあるのか．（演習の問題を見ていると, 今のところは議論する必要はなさそう） **お答え：**例示されている場合はない．議論が必要なら明示すべき．

質問 16： $\forall$, $\exists$ の記号を頑なに使わずに日本語で書いていますが，何か意図はありあすか？ 使った方が短いしわかりやすい気がします． **お答え：**そうかもしれません．しかし，過去に「日本語でただしく書き下すことができない」ケースを複数観察したので「記号に淫する」ことを避けています．

質問 17： f に関して「写像」と「関数」の違いを知りたい．発表のとき何といえばいいのか悩んでしまう．

お答え： 黒板 B の 7 ページで説明しましたね．

質問 18： 写像，逆写像及び単射、全射などに関わる定理と性質の証明を知りたいです．

お答え： 具体的にはどれ？ そうですか，としか回答しようがない．