位相空間論第一（講義）(MTH.B201)

集合族

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-1

東京工業大学理学院数学系

2024/05/07

Q and A

Q: 有限集合を $\{1, 2, \ldots, n\}$ への全単射の存在で説明していましたが，これは単射だけでも十分なように感じました．全射の条件を加えることによる何かメリットがあるのでしょうか．

元の個数

Q: 黒板 C の 4 ページでは集合 X を直線に対応させて図示されていますが，$\mathbb{R}$ への全単射が存在しない集合を直線で表したり，$\mathbb{R}^2$ への全単射が存在しない集合をベン図で表すことで不都合が生じることは無いのでしょうか．

生じる．ただの例え話である

$X = \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{G} := \{ f \,;\, f(x) = ax + b \quad a \neq 0$

Q: 同値関係が，群の公理系と整合性があるというようなことをおっしゃっていましたが，どういうことでしょうか．自分で考えてみましたが，よくわかりませんでした．

・群 : $G \quad \circ$

- $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$
- $\exists e \quad \alpha \circ e = e \circ \alpha = \alpha$
- $\forall \alpha, \exists \beta \;:\; \alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha = e$

Example $\mathcal{F} := \{ f : X \to X$ 全単射 $\}$

$f \circ g$: 写像の合成 $\quad e = \mathrm{id}_X$

$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$

$(f, g \in \mathcal{G} \Rightarrow f \circ g \in \mathcal{G},\ f^{-1} \in \mathcal{G})$

$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$: 部分群

$x \sim y \iff \exists g \in \mathcal{G}$ s.t. $y = g(x)$

有限数列

- $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.
- $(a_j)_{j=1}^{5}$
- $(a_j)_{j\in S}$, $S := \{m \in \mathbb{N}\,;\, 1 \leqq m \leqq 5\}$

無限数列

- $(a_1, a_2, a_3, \dots)$
- $(a_j)_{j=1}^{\infty}$
- $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$
- $a\colon \mathbb{N} \ni j \longmapsto a_j \in \mathbb{R}$

しばしば $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ と書く.

a_j : 何でもよい

実数

j 文脈の中では何か宣言されている

$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

集合か数列かは文脈による

$a : S \to \mathbb{R}$

$(a_j)_{j=0}^{\infty}$

注

集合 $\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$

数列 $(1, 1, 2) \neq (1, 2)$

添字付けと関数

λ lambda

Λ

μ mu

M

関数

- $f\colon \mathbb{R} \ni x \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}$
- $\big(f(x)\big)_{x\in\mathbb{R}}$

写像

何でもよい

- $f\colon \Lambda \ni \lambda \longmapsto x_\lambda \in X$
- $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$

かきかた

Λ: 添字集合

λ: 添字

Λ: 興味があるのは無限集合の場合

- X: 普遍集合 fix
- Λ: 集合

$\Lambda \ni \lambda \longmapsto A_\lambda \in 2^X$

  - ▶ $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$; 各 λ に対して $A_\lambda \subset X$.

"集合族"

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{x \in X\,;\ \text{ある添字 } \lambda \in \Lambda \text{ が存在して } x \in A_\lambda\}$$

∃ or

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{x \in X\,;\ \text{すべての添字 } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } x \in A_\lambda\}$$

∀ and

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{f : \Lambda \to X\,;\ \text{各 } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } f(\lambda) \in A_\lambda\}$$

$f(1)$ $f(2)$

$\left(A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2)\,;\ a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2\} \right)$

$\Lambda = \{1, 2\}$

例

$A_1 = [0,0] = \{0\}$

$A_2 = [0, \frac{1}{2}]$ $A_3 = [0, \frac{2}{3}]$

$$X = \mathbb{R}; \quad \Lambda = \mathbb{N}; \qquad A_k := \left[0, 1 - \frac{1}{k}\right] \qquad (k = 1, 2, 3 \dots)$$

ラムダ

極限とかんけい

- $\cancel{\bigcap_{k\in\mathbb{N}}} \bigcup A_k = \cancel{\bigcap_{k=1}^{\infty}} \bigcup A_k \overset{\subset}{\underset{\supset}{=}} [0, 1)$

A_k

∵ $x \in$ 左辺 $\Rightarrow$ ある k が存在して $x \in [0, 1-\frac{1}{k}]$

$\Rightarrow x \in [0, 1)$ ∵ $(1 - \frac{1}{k} < 1)$

$x \in$ 右辺 $\Rightarrow 0 \leqq x < 1 \Rightarrow 1 - x > 0$

アルキメデス $\Rightarrow$ ある k が存在して $1 - x > \frac{1}{k}$

$\Rightarrow x < 1 - \frac{1}{k} \Rightarrow x \in A_k \Rightarrow x \in \bigcup A_k$

例

$$X = \mathbb{R}; \quad \Lambda = \mathbb{N}; \qquad A_k := \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right] \qquad (k = 1, 2, 3 \dots)$$

- $\displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k =$ $\{0\}$

例

$$X = \mathbb{R}; \quad \Lambda = \mathbb{N}; \qquad A_k := [-k, k] \qquad (k = 1, 2, 3 \dots)$$

- $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k =$ $\mathbb{R}$

例

任意の空でない集合 Λ に対して $\prod_{\lambda \in \Lambda} X$

同じ

$x \in X$ をひとつ固定する

$f : \Lambda \ni \lambda \longmapsto x \in X$ (定値)

$\Rightarrow f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X$

$\neq$

$\emptyset$