位相空間論第一（講義）(MTH.B201)

集合族

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-1

東京工業大学理学院数学系

2024/05/07

集合族の演算

mu

X: 普遍集合；Λ, M：（添字）集合；
$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(B_\mu)_{\mu\in\mathrm{M}}$：$X$ の部分集合の族

命題 (命題 6.11)

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

分配法則

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\mu\in\mathrm{M}} B_\mu\right) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\mathrm{M}} (A_\lambda \cap \overset{B}{\cancel{A}}_\mu)$$

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cup \left(\bigcap_{\mu\in\mathrm{M}} B_\mu\right) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\mathrm{M}} (A_\lambda \cup \overset{B}{\cancel{A}}_\mu)$$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

X: 普遍集合；Λ：（添字）集合；$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$：$X$ の部分集合の族

命題 (命題 6.13)

$$\cdot \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} {A_\lambda}^c, \qquad \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} {A_\lambda}^c$$

$x \in$ 左辺 $\Leftrightarrow$ ($x \in A_\lambda$ となる λ が $\exists$ 存在する or) でない

$\Leftrightarrow$ $\forall$ すべての λ に対して $x \notin A_\lambda$

$\Leftrightarrow$ すべての λ に対して $x \in {A_\lambda}^c$

$\Leftrightarrow$ $x \in$ 右辺

集合族と写像の像・逆像

X, Y: 集合；Λ：（添字）集合；
$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$：$X$ の部分集合の族；$(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$：$Y$ の部分集合の族
$f\colon X \to Y$：写像

$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

命題 (命題 6.15)

- $f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$
- $f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$
- $f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$
- $f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$

集合族の直積

X: 普遍集合；Λ: 集合；$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$：$X$ の集合族

定義

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{f : \Lambda \to X\,;\ \text{各 } \lambda\in\Lambda \text{ に対して } f(\lambda)\in A_\lambda\}$$

$\Lambda = \{1, 2\}$

$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = A_1 \times A_2 = \{f : \{1,2\} \to X\,;\ f(1)\in A_1,\ f(2)\in A_2\}$

$\text{“}=\text{”}\ \{(f(1), f(2))\,;\ f(1)\in A_1, f(2)\in A_2\}$

$= \{(a_1, a_2)\,;\ a_1\in A_1\ a_2\in A_2\}$

集合族の直積

$X \times \phi = \phi$

$\phi \times X = \phi$

X: 普遍集合；Λ: 集合；$(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$：$X$ の集合族

主張

ある $\lambda_0 \in \Lambda$ に対して $A_{\lambda_0} = \varnothing$ ならば,

$$f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \varnothing$$

$f(\lambda) \in A_\lambda$ for any $\lambda \in \Lambda$

$f(\lambda_0) \in A_{\lambda_0} = \phi$ 矛盾

空集合が要素をもつことになるので.

選択公理

X: 普遍集合；Λ: 集合；$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$：$X$ の集合族

公理 (選択公理 the axiom of choice) みとめる.

すべての λ に対して $A_\lambda \neq \varnothing$ ならば

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \varnothing$$

「すべての A_λ からひとつずつの元を同時にとることができる」

本日の課題の提出締切は

2024年05月09日（木曜日）07:00 JST