位相空間論第一（講義）(MTH.B201)

集合族

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-1

東京工業大学理学院数学系

2024/05/07

集合族の演算

X: 普遍集合；Λ, M：（添字）集合；
$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(B_\mu)_{\mu\in\mathrm{M}}$：$X$ の部分集合の族

命題 (命題 6.11)

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\mu\in\mathrm{M}} B_\mu\right) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\mathrm{M}} (A_\lambda \cap A_\mu)$$

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cup \left(\bigcap_{\mu\in\mathrm{M}} B_\mu\right) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\mathrm{M}} (A_\lambda \cup A_\mu)$$

ド・モルガンの法則

X: 普遍集合；Λ：（添字）集合；$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$：$X$ の部分集合の族

命題 (命題 6.13)

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda{}^c, \qquad \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda{}^c$$

集合族と写像の像・逆像

X, Y: 集合；Λ：（添字）集合；
$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$：$X$ の部分集合の族；$(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$：$Y$ の部分集合の族
$f\colon X \to Y$：写像

命題 (命題 6.15)

- $f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$
- $f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$
- $f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$
- $f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$

集合族の直積

X: 普遍集合；Λ: 集合；$(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$：$X$ の集合族

定義

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{ f \colon \Lambda \to X \,;\, \text{各 } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } f(\lambda) \in A_\lambda \}$$

集合族の直積

X: 普遍集合；Λ: 集合；$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$：$X$ の集合族

主張

ある $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda = \varnothing$ ならば,

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \varnothing$$

選択公理

X: 普遍集合；Λ: 集合；$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$：$X$ の集合族

公理 (選択公理 the axiom of choice)

すべての λ に対して $A_\lambda \neq \varnothing$ ならば

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \varnothing$$