2024 年 05 月 07 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

位相空間論第一（講義）(MTH.B201) 講義資料 5

お知らせ

- 15 名の方から課題提出がありました．T2SCHOLA にて返却しておりますのでご確認ください．なお，用紙に記入されているコメントは山田用のメモです．読めない字があるかもしれませんが，この資料に回答やコメントがありますのでそちらを参照してください．
- 次回 5 月 14 日に**定期試験の予告**を行います．ご出席ください．

前回までの訂正

- 映写資料・黒板 B，10/10 ページ：（誤）$\mathit{\Gamma} \in X \times Y$；（正）$\mathit{\Gamma} \subset X \times Y$
- 映写資料・黒板 C，10/11 ページ（誤）$\mathbb{R}^n$ (6 箇所)（正）$\mathbb{R}^{n+1}$
- 映写資料・黒板 C，10/11 ページ (誤) $P(\mathbb{R}^n) := (\mathbb{R}^n)/\sim$ (正) $\mathbb{R}P^n := (\mathbb{R}^{n+1})^*/\sim$

授業に関する御意見

- 授業の最後に商集合に関わる例を同値関係の例のように詳しく説明したほうがいい．　**山田のコメント：**次回にまわします．
- 最初見た時は，反射律が成り立つのは当たり前だから同値関係の条件から外して良いのではと思ってしまった．（演習で反射律が必要であることを述べる問題があった．）
  山田のコメント：そうですね．反射律を入れないと $\varnothing \subset X \times X$ も同値関係になってしまいます．
- 現在学んでいる基礎的な概念がどのような議論につながっていくのか多少紹介していただけるとモチベーションが上がります．
  山田のコメント：あらゆる分野に関係するので全ての人のモチベーションを上げるのは困難．あなたはどういう話題ならモチベーションが上がりますか？
- $\exists$，$\forall$ などの記号に書き直すことが苦手なので，記号を用いた解説もしていただくことは可能でしょうか．
  山田のコメント：では「文章」で書くのはまちがいなくできますか？

質問と回答

質問 1： 直積集合は (a, b) と表しますが，a より大きく b より小さい区間と同じ表記で問題ないのでしょうか？

お答え： 直積集合は $A \times B$ で表す．(a, b) は直積集合の元．問題が起きそうな文脈では言葉で（補足）説明する．

質問 2： 空集合の直積集合は定義できますか？

お答え： 任意の集合 X に対して $\varnothing \times X = \varnothing$，$X \times \varnothing = \varnothing$（定義に従って確かめよ）.

質問 3： 空写像 $f_\varnothing : \varnothing \to Y$ が紹介されていたが，空でない集合 X から $\varnothing$ に対応させる規則は，X の元に対応させるべき元が存在しないからそもそも写像ではないということか？

お答え： $X \times \varnothing = \varnothing$ なのでその部分集合は $\varnothing$ のみですね．

質問 4： 今回の構義（原文ママ：講義のことか）に限らず，数学において「同一視できる」という表現をよく耳にするが，同一視することによって，もとの対象では成り立っていた命題が成り立たなくなることはあるのか．その場合，同一視するのは適当であるのか．

お答え： 成り立たない命題があるなら「同一視できる」という言明または「同一視のやり方」がまちがっている．

質問 5： 今回の授業では「同一視できる」という文章が使われていたが，個人的に違うものなのに同じとして扱おうとしているところに違和感を感じてしまった．この「同一視できる」他のところで実際に何かの証明などで使われているかどうかが気になった．

お答え： 現場で見てもらうしかないと思うのですが，“何かの構造をふくめて 1 対 1 対応している” ときその構造を考える限りそれらは同一のものと考えてよい．

質問 6： 直積集合 $\prod_{j=1}^{n} A_j := A_1 \times \cdots \times A_n$ での記号「Π（パイ）」について書き方を知りたい．Π？ π でもいいの？

お答え： π の大文字です．したがって小文字 π を用いるのは誤り．

質問 7： 演習で「$f = g \circ \pi$ がただ 1 つあることを示せ」で今までは存在性→一意性と示していたが，今回は g を定める→ well-defind（原文ママ：well-defined のことか）→唯一性という順番だった．今まで well-defind（原文ママ）に触れてなかったが，必ず必要（原文ママ）なのか．

お答え： Well-defined まで言わないと存在が示せません．

質問 8： 演習にてある条件をみたす写像の存在を示せ，というものがあったのですが，実際にそのような写像を構築すること以外で良い論証の方法はありますか．

お答え： 答えを “求め” ないで存在を証明した例は？

質問 9：「グラフの特徴づけ」と「空写像」の部分がよく理解しなかった．そのところの詳細な証明を知りたい．

お答え：「証明」すべき命題はどれ？

質問 10： 教科書の 26 ページで出てきた「自然な射影」と 32 ページの商集合のところで出てきた「自然な射影」は同じですか？

お答え： 一応ちがいます．前者は後者の特別な場合と解釈できます．どんな同値関係をとればよいでしょう．

質問 11： 第 i 射影と $X \in x \mapsto [x] \in X/\sim$ はどちらも自然な射影と呼ばれると教科書に書かれていましたが，なぜ同じ名前で呼ばれるのですか．

お答え： ここで扱った以外にも「射影」という言葉を使うことがある．たまたま同じ言葉と思ってよいが，ここで扱った直積集合からの射影は商集合への射影の特別な場合とみなせる．

質問 12： 空写像が全単射であることをどうのように（原文ママ：「どのように」？）厳密に証明しますか？

お答え： 一般には全単射になりません．テキスト 29 ページ命題 5.6.

質問 13： 空写像がよくわかりません．空写像 $f_\varnothing$ はグラフ $\Gamma \subset \varnothing \times A$ なる Γ と (5.2) を満たすなら同一視されますが，$\varnothing \times A = \varnothing$ であることから，$\Gamma = \varnothing$ になります．このとき，$\Gamma = \varnothing$ は (5.2) を満たす必要がありますが，「任意の $x \in \varnothing$ に対して $(x, y) \in \varnothing$ となる $y \in Y$ がただ一つ存在する」と言う主張が真になるのかがよくわかりません．

お答え： $x \in \varnothing$ はつねに偽なので．

質問 14： 有限集合を $\{1, 2, \ldots, n\}$ への全単射の存在で説明していましたが，これは単射だけでも十分なように感じました．全射の条件を加えることによる何かメリットがあるのでしょうか．

お答え： さらに有限集合の元の個数を定義する際にメリットがありますね．

質問 15： 黒板 C の 4 ページでは集合 X を直線に対応させて図示されていますが，$\mathbb{R}$ への全単射が存在しない集合を直線で表したり，$\mathbb{R}^2$ への全単射が存在しない集合をベン図で表すことで不都合が生じることは無いのでしょうか．

お答え： 単なる模式図です．もちろん不都合があります．

質問 16： $[x] = \{x\}$（任意の $x \in$（原文ママ：？）に対して，x と同値関係にあるのは x のみ）であるような商集合を考える意味はあるのか．（もとの集合と変わらないと思っている．）

お答え： はい．数学の概念のもっとも簡単な例（自明な例）はたいていそうですね．

質問 17： 同値関係が，群の公理系と整合性があるというようなことをおっしゃっていましたが，どういうことでしょうか．自分で考えてみましたが，よくわかりませんでした．「$x \sim x$」は単位元，「$x \sim y \wedge y \sim z \implies x \sim z$」は結合律に関係していそうではあると感じますが，上手く定式化できません．

お答え： 次回述べます．

質問 18： 話は変わりますが，G を群，H をその部分群とし，$x, y \in G$ に対し $x \sim y$ を $x^{-1}y \in H$ と定めると、同値関係になっていて，剰余類が定められるというのは気付きました．

お答え： はい．