

位相空間論第一（講義）(MTH.B201)

集合の濃度

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

<http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-1>

東京工業大学理学院数学系

2024/05/14

Q and A

Q: 授業内では $\bigcup_{k=1}^{\infty}$ や $\bigcap_{k=1}^{\infty}$ は極限とは関係ないと言っていました。が、 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k=1}^n$ のように扱うのは間違いなのでしょうか。

Q and A

Q: 演習の小テストの問題 $\boxed{2}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, n) = [0, 1)$ の証明で, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, n) \subset [0, 1)$ を証明するときに背理法を使いましたが, 背理法ではなく, 直接証明する方法として何がありますか?

選択公理

X : 普遍集合 ; Λ : 集合 ; $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$: X の集合族

定義

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{f: \Lambda \rightarrow X; \text{各 } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } f(\lambda) \in A_\lambda\}$$

公理 (選択公理 the axiom of choice)

すべての λ に対して $A_\lambda \neq \emptyset$ ならば

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$$

Q and A

- Q: 公理は証明せずに認めるものとして扱われますが、公理として認められる基準は何ですか？
- Q: 以前にトートロジーについて紹介がありました。公理とトートロジーはどのような違いがありますか。（公理と同値なトートロジーがあったりするのでしょうか）

Q and A

Q: 選択公理の“同時にとり出す”というのがよく分からない.
他の元のとり方によらないということなのですか？

選択公理の応用

定理 (命題 7.18)

無限集合 X に対して, \mathbb{N} から X への単射が存在する.

定義 (有限集合・無限集合; テキスト 6 ページ)

集合 A が有限集合であるとはある正の整数 n が存在して,
 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ と (重複なく) 書けることである.
有限集合でない集合を無限集合という.

集合の濃度

定義 (テキスト 51 ページ)

集合 X, Y が対等 \Leftrightarrow 全単射 $X \rightarrow Y$ が存在.

- ▶ $|X| = |Y| \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} X$ と Y が対等
- ▶ $|X| = n \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} X$ と $\{1, \dots, n\}$ が対等
- ▶ $|\emptyset| := 0$

定義

$|X| \leq |Y| \Leftrightarrow$ 単射 $X \rightarrow Y$ が存在.