位相空間論第一（講義）(MTH.B201)

集合の濃度

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.official.kotaroy.com/class/2024/top-1

東京工業大学理学院数学系

2024/05/14

可算濃度

- A：有限集合 $\Rightarrow |A| \neq |\mathbb{N}|$ かつ $|A| \leqq |\mathbb{N}|$.
- X：無限集合 $\Rightarrow |\mathbb{N}| \leqq |X|$.（命題 7.18）

定義

- $\aleph_0 := |N|$：<u>可算濃度</u>
- X が<u>高々可算集合</u> $\overset{\text{def}}{\iff} |X| \leqq \aleph_0$

例

- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$

ベルンシュタインの定理

定理

定理 8.8 $|X| \leqq |Y|$ かつ $|Y| \leqq |X| \Rightarrow |X| = |Y|$.

例

例 8.10 $|\mathbb{Z}^2| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

$$f\colon \mathbb{N} \ni x \longmapsto (x, 0) \in \mathbb{Z} \times Z$$
$$g\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ni (x, y) \longmapsto 2^{|x|} \cdot 3^{|y|} \cdot 5^{\mathrm{sgn}(x)+1} \cdot 7^{\mathrm{sgn}(y)+1} \in \mathbb{N}$$

例

$$|\mathbb{R}| = |(0,1)| = |[0,1]|$$

冪集合の濃度

$|X| < |Y| \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} |X| \leqq |Y|$ かつ $|X| \neq |Y.$

定理 (定理 8.15)

$|X| < |2^X|$