2024 年 05 月 14 日 (2024 年 05 月 14 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

位相空間論第一（講義）(MTH.B201) 講義資料 6

お知らせ

- 11 名の方から課題提出がありました．T2SCHOLA にて返却しておりますのでご確認ください．
- **授業学習アンケート**にご協力ください．T2SCHOLA のトピック「一般」の冒頭においてあります．
- 本日**定期試験の予告**を行います．

定期試験予告

日時： 2024 年 5 月 28 日（火）**10 時 50 分〜12 時 20 分**（90 分）
試験開始 5 分前には指定の座席（当日指示する）に着席すること

場所： **本館；M-B104**（授業が行われている教室）

範囲： 主として 5 月 21 日までの授業で扱った内容.

返却： 答案は T2SCHOLA より返却する．採点に関するクレイム・議論はメイルにて期限を限って受け付ける．詳細は試験問題に記す．なお，評価の対象は試験の答案と提出物の答案に書かれたもののみとする．

評価： 60 点満点．演習の評価 40 点と合計して成績を決定する．試験の得点が思わしくない人は提出物の得点に重みをつけて加味することがある．詳細は試験返却の際に指示する．

持込： 指定用紙 1 枚の表裏に好きなことを書き込んで持ち込んでよい.
- 用紙の pdf は T2SCHOLA，講義 web からダウンロードできる.
- 用紙への直接のコピーや他の用紙の貼付は不可.
- 用紙は試験終了後回収するので学籍番号・氏名を明記すること.

禁止事項： 携帯電話，スマートフォン，糸電話，狼煙を見るための双眼鏡など**外部と通信する機器**, パーソナルコンピュータ・スーパーコンピュータなど**電源を必要とする機器**, 数学が得意な友人などの**生き物**など，指定用紙と筆記用具以外は持ち込み禁止.

- やむを得ない理由で**試験を受けられない方**は，**試験前**までに電子メイルにてご連絡ください.
- 連絡なしに試験を欠席された方は，**単位を得る権利を失います**.

授業に関する御意見

- 特になし．　**山田のコメント：** Me, too.
- 課題の提出期限をもう少し延ばしていただきたいです.（週末をはさんでいただけると助かります.）
  山田のコメント： 当方の処理能力を超えます.

質問と回答

質問 1： 数列を集合族とみなすことは可能ですか？

お答え： ひとつの数を集合とみなすことが可能か，という質問でしょうか？

質問 2： 添字づけられた集合 A_λ（原文ママ：$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$？）の添え字集合 λ（原文ママ：Λ？）はなぜ一般の集合なのか．自然数集合だけではだめなのか．

お答え： λ が連続的に動くことを考えたくないですか？

質問 3： 添字が λ だと何だか扱いづらいと感じた．添え字を自然数にして単なる番号付けではだめなのか．（$A_1, A_2, \dots$ のように）

お答え： たとえば連続的な添字付けを考えている．

質問 4： 授業で新しく直積集合 $\prod_{k=1}^n A_k$ について教えてもらったが，これが $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ を表しているなら，別にこのように定義せずにそのまま使うことができそうだと感じ，この直積集合を使うメリットが何なのかが気になった．

お答え： 無限個の添字に一般化できるのがメリット．

質問 5： 演習で集合族について，$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{m=n}^\infty A_m$，$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{m=n}^\infty A_m$ という記号の定義を見たが，これは，数列の下極限，上極限の定義 $\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty}\left(\inf_{n\geqq k} a_n\right)$，$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty}\left(\sup_{n\geqq k} a_n\right)$ と何か関連性はあるのか．

お答え： 集合でも “下極限” “上極限” といいますね．テキスト参照．同じような “感じ” がしますか？

質問 6： 演習の小テストの問題 $\boxed{2}$，$\bigcap_{n=1}^\infty (-\frac{1}{n}, n) = [0,1)$ の証明で，$\bigcap_{n=1}^\infty (-\frac{1}{n}, n) \subset [0,1)$ を証明するときに背理法を使いましたが，背理法ではなく，直接証明する方法として何がありますか？

お答え：
- $x \in \bigcap_{n=1}^\infty (-\frac{1}{n}, n) \implies x \in (-1,1) \implies x < 1$.
- $x \in \bigcap_{n=1}^\infty (-\frac{1}{n}, n) \implies$ すべての n に対して $x > -\frac{1}{n} \implies x \geqq \lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{n}) = 0 \implies x \geqq 0$.

質問 7： 授業内では $\bigcup_{k=1}^\infty$ や $\bigcap_{k=1}^\infty$ は極限とは関係ないと言っていましたが，$\bigcup_{k=1}^\infty A_i = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=1}^n$ のように扱うのは間違いなのでしょうか．

お答え： $\lim$ をどう定義しますか？

質問 8： 選択公理の “同時にとり出す” というのがよく分からない．他の元のとり方によらないということなのですか？

お答え： たとえば $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の元をとり出すときどうやります？

質問 9： 公理は証明せずに認めるものとして扱われますが，公理として認められる基準は何ですか？

お答え： 公理として認める，というよりは採用する，が適切だと思います．

質問 10： 以前にトートロジーについて紹介がありましたが公理とトートロジーはどのような違いがありますか．（公理と同値なトートロジーがあったりするのでしょうか）

お答え： 公理とトートロジーは違うものです．トートロジーの定義を調べてごらんなさい．

質問 11： ある $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda = \varnothing$ ならば $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \varnothing$ であるという主張がありましたが，$\prod_{\lambda\in\varnothing} A_\lambda$, $\bigcup_{\lambda\in\varnothing} A_\lambda$, $\bigcap_{\lambda\in\varnothing} A_\lambda$ も $\varnothing$ と考えられるでしょうか．

お答え： 定義に戻ってみましょう．

質問 12： カントール集合の演習問題がやりたいと思っていたらちょうど出題してくれました．良い復習の機会になりました．

お答え： それは良かった．